Казанский федеральный университет

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методическое пособие

Казань - 2013

УДК 517.925

*Печатается по решению Учёного совета
филиала Казанского федерального университета
в г. Зеленодольск*

Рецензенты:
профессор кафедры высшей математики КГЭУ, д.ф.-м.н.
С. А. Григорян,
доцент кафедры теории относительности и гравитации КФУ, к.ф.-м.н.
В.А. Попов.

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Казань: КФУ, 2013. - 30 с.

Данное методическое пособие посвящено методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, изучаемых в рамках курса "Дифференциальные уравнения" в Институте физики КФУ и на физико-математическом факультете филиала КФУ в г. Зеленодольск. Это пособие предлагается в помощь студентам для эффективного освоения материала, а также для проведения аудиторных практических занятий. В каждом разделе приводятся минимальные необходимые теоретические сведения, методы решения и подробно разбираются типовые примеры. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы.

Содержание

1 Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 1.1. *Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* называется система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij} постоянны, $\dot{x}_i \equiv \dfrac{dx_i}{dt}$.

Введём векторы и матрицу:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \overline{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (1) можно записать в векторной форме:

$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X} + \overline{F}. \tag{2}$$

Определение 1.2. Если свободные слагаемые равны нулю $\overline{F} = \overline{O}$, то система

$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X} \tag{3}$$

называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений.*

Необходимо найти n линейно независимых частных решений $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n$, чтобы построить общее решение $\overline{X}$ системы (3): $\overline{X} = C_1\overline{X}_1 + \dots + C_n\overline{X}_n$, $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

Частные решения будем искать в виде $\overline{X_i} = e^{\lambda t}\overline{B}$. Здесь

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \ \lambda,\ b_1,\ b_2, \ldots, b_n - \text{числа.}$$

Подставим $\overline{X}_i$ в систему (3): $\lambda e^{\lambda t}\overline{B} = Ae^{\lambda t}\overline{B}$, или

$$(A - E\lambda)\overline{B} = \overline{O}, \tag{4}$$

где E - единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Как известно из линейной алгебры, для существования ненулевого решения однородной системы алгебраических уравнений (4), необходимо и достаточно, чтобы определитель был равен нулю

$$|A - E\lambda| = 0. \tag{5}$$

Условие (5) представляет собой алгебраическое уравнение степени n на числа λ, это уравнение называется *характеристическим.* λ - собственные значения матрицы A, а $\overline{B}$ - собственный вектор, отвечающий λ. Совокупности решений $\lambda_1, ..., \lambda_n$ уравнения (5) всегда соответствует набор n линейно независимых частных решений системы (3). Вид частного решения зависит от типа корня λ_i. Корень может быть вещественным или комплексным, а также имеет параметр кратности (корни могут совпадать). Рассмотрим различные случаи.

Вещественный однократный корень λ_i даёт одно решение $\overline{X}_i = e^{\lambda_i t}\overline{B}_i$, где $\overline{B}_i$ - вещественный вектор.

Комплексному корню $\lambda_j = \alpha + i\beta$ соответствует решение $\overline{X}_j = e^{\lambda_j t}\overline{B}_j$, элементы столбца $\overline{B}_j$ могут быть комплексными числами. Можно выделить реальную и мнимую части решения $\overline{X}_j = U + iV$. Функции U и V также являются частными решениями системы (3), которые линейно независимы. Комплексно сопряжённый корень $\lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$ не даёт новых независимых решений.

Рассмотрим случай вещественного корня λ_k с кратностью s. Пусть ранг матрицы $(A - E\lambda_k)$ равен r, а n - порядок этой матрицы, тогда система (4) имеет $m \equiv n-r$ линейно независимых решений. Если $m = s$, то существует s линейно независимых частных решений $\overline{X}_i = e^{\lambda_k t}\overline{B}_i,\ i = 1\dots s$. Если $m < s$, то решение имеет вид $\overline{X}_k = e^{\lambda_k t}(\overline{B} + \overline{C}t + \overline{D}t^2 + \dots + \overline{Q}t^{s-m})$. Подставим $\overline{X}_k$ в систему (3) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему матричных уравнений на неизвестные столбцы $\overline{B},\ \overline{C},\ \overline{D}, \dots \overline{Q}$:

$$\begin{cases} (A - E\lambda)\overline{B} = \overline{C}, \\ (A - E\lambda)\overline{C} = 2\overline{D}, \\ \dots \end{cases}$$

Её общее решение будет содержать s произвольных параметров.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы. Коэффициенты при x образуют первый столбец, при y - второй:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

запишем матрицу

$$A - E\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1.$$

Числа λ_1 и λ_2 есть вещественные однократные корни.

Найдём собственный вектор для собственного числа $\lambda_1 = 5$ из системы уравнений:

$$(A - E\lambda_1)\overline{B} = \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 3 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Если умножить вторую строку на -1, получим первую, то есть вторая строка есть следствие первой, поэтому

$$(-3 \quad 1) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } -3b_1 + b_2 = 0.$$

Положим, например, $b_1 = 1$, тогда из последнего уравнения следует $b_2 = 3$. Получили собственный вектор

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственному числу $\lambda_1 = 5$ соответствует частное решение

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\overline{B} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдём собственный вектор для $\lambda_2 = 1$ из системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 3 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ или } b_1 + b_2 = 0.$$

Выбираем $b_1 = 1$, тогда из последнего уравнения следует $b_2 = -1$. Имеем собственный вектор и частное решение

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{X}_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Два частных решения $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ линейно независимы, общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}, \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Для определённости, выберем $\lambda_2 = 1 - 3i$, тогда система уравнений на элементы собственного вектора примет вид:

$$(A - E\lambda)\overline{B} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ или } 3ib_1 - 3b_2 = 0.$$

Положим, например, $b_1 = i$, тогда из последнего уравнения следует $b_2 = -1$. Комплексное решение для $\lambda_2 = 1 - 3i$:

$$\overline{X} = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = e^{t(1-3i)} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Эйлера $e^{\alpha \pm i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta \pm i \sin\beta)$, перепишем:

$$\overline{X} = e^{t}(\cos 3t - i \sin 3t) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} i\cos 3t + \sin 3t \\ -\cos 3t + i \sin 3t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + ie^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Реальная $Re\overline{X}$ и мнимая $Im\overline{X}$ части $\overline{X}$ соответствуют разным частным решениям:

$$\overline{X}_1 = Re\overline{X} = e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}, \ \overline{X}_2 = Im\overline{X} = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 = C_1 e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x = C_1 e^t \sin 3t + C_2 e^t \cos 3t, \\ y = -C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t. \end{cases}$$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Найдём частное решение для $\lambda_1 = 1$. Система уравнений на компоненты собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0$$

Третья строка есть следствие второй, поэтому:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_2 - b_3 = 0, \\ b_1 = 0. \end{cases}$$

Возьмём $b_2 = 1$, тогда $b_3 = -1$. Частное решение:

$$\overline{X}_1 = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдём частные решение для пары $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Возьмём $\lambda_2 = 1 + 2i$. Система уравнений на компоненты собственного вектора:

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Упростим систему, приведём к диагональному виду матрицу

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix},$$

прибавим ко второй строке первую, умноженную на $2i$; сложим к третьей строке первую, умноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6i & -2i \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на $-2i$, получим упрощённую систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 - 2ib_2 = 0, \\ 3b_2 - b_3 = 0. \end{cases}$$

Положим $b_2 = 1$, тогда из системы следует $b_1 = 2i$, $b_3 = 3$. Комплексное решение для $\lambda_2 = 1 + 2i$:

$$\overline{X} = e^{t(1+2i)} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Отсюда, два частных решения:

$$\overline{X}_2 = Re\overline{X} = e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix}, \ \overline{X}_3 = Im\overline{X} = e^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\overline{X}_2 + C_2\overline{X}_2 + C_3\overline{X}_3 =$$

$$= C_1e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3e^t \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Нашли корень кратности $s = 3$. Найдём ранг матрицы $(A - E\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Очевидно, вторая и третья строки матрицы $A - E\lambda$ есть следствия первой, то есть ранг $r = 1$. Параметр $m = n - r = 3 - 1 = 2$ (n - число уравнений в системе). Найдём $s - m = 1$, значит решение ищем в виде: $\overline{X} = (\overline{U} + t\overline{V})e^{\lambda t}$, где

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \overline{V} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Подставим $\overline{X}$ в систему $\dot{\overline{X}} = A\overline{X}$: $\lambda\overline{U} + \overline{V} + t\lambda V = A(\overline{U} + t\overline{V})$. Приравниваем матрицы при одинаковых степенях по t, получаем системы:

$$(A - E\lambda)\overline{V} = 0, \qquad (7)$$

$$(A - E\lambda)\overline{U} = \overline{V}. \qquad (8)$$

Из системы (7) следует: $(A - E\lambda)\overline{V} = 0 \Rightarrow b_1 - b_2 - b_3 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 + b_3$, значит

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Распишем систему (8), учитывая вид $\overline{V}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Неоднородная система линейных алгебраических уравнений (8) имеет решение, если ранг матрицы $(A-\lambda E)$ равен рангу расширенной матрицы системы $(A - \lambda E \mid \overline{V})$. Ранг $(A - \lambda E)$ найден выше, $r = 1$. Приведём расширенную матрицу

$$(A - \lambda E \mid \overline{V}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

к диагональному виду. Для этого ко второй строке сложим первую, умноженную на -2; к третьей строке прибавим первую:

$$(A - \lambda E \mid \overline{V}) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 + b_3 \\ -b_2 - 2b_3 \\ b_2 + 2b_3 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1, если $b_2 + b_3 \neq 0$, $-b_2 - 2b_3 = 0$, $b_2 + 2b_3 = 0$. Находим $b_2 = -2b_3$, подставим в столбец $\overline{V}$:

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} b_2 + b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_3 \\ -2b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ теперь } b_3 - \text{произвольная постоянная.}$$

Расширенная матрица упрощается $(A - \lambda E \mid \overline{V}) \sim [\ 1 \ \ -1 \ \ -1\ ][\ -b_3\ ]$, а значит и система уравнений (9):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 - a_2 - a_3 = -b_3.$$

Выбираем a_2 и a_3 в качестве произвольных постоянных, тогда $a_1 = a_2 + a_3 - b_3$ и находим

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 - b_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение содержит три произвольные постоянные a_2, a_3 и b_3:

$$\overline{X} = (\overline{U} + t\overline{V})e^{\lambda t} = e^t \begin{pmatrix} a_2 + a_3 - b_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} -b_3 \\ -2b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z; \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z;\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z;\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Ответы:

1. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.

2. $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t),\ y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$.

3. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\ z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$.

4. $x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2\cos t + C_3\sin t),\ y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t]$, $z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (2C_3 + C_2)\sin t]$.

5. $x = (C_2 + C_3 t)e^{-t},\ y = 2C_1 e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^{-t},\ z = C_1 e^t - (C_2 + C_3 + C_3 t)e^{-t}$.

6. $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t},\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$.

2 Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим на отрезке $t \in [a, b]$ линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений
$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X} + \overline{F}. \tag{10}$$
Будем полагать, что элементы $a_{ij}(t)$ матрицы A и функции $f_i(t)$ из столбца $\overline{F}$ непрерывны на отрезке $t \in [a, b]$. Тогда справедлива теорема:

Теорема 1. Общее решение на отрезке $t \in [a, b]$ системы (10) равно сумме общего решения $\overline{X}_0 = \sum C_i\overline{X}_i$ соответствующей однородной системы
$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X} \tag{11}$$
и какого-нибудь частного решения $\overline{X}_{ch}$ неоднородной системы (10), то есть
$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \overline{X}_{ch}.$$

Для нахождения частного решения используют *метод вариации произвольных постоянных.*

Если $\overline{X}_0 = \sum C_i\overline{X}_i$ общее решение однородной системы (11), то решение неоднородной системы (10) ищут в виде
$$\overline{X} = \sum C_i(t)\overline{X}_i, \tag{12}$$
где $C_i(t)$ - новые неизвестные функции. Подставим (12) в (10), получим систему дифференциальных уравнений на $C_i(t)$:
$$\sum \dot{C}_i(t)\overline{X}_i = \overline{F}. \tag{13}$$
Система (13) всегда разрешима относительно $\dot{C}_i(t)$ на отрезке $t \in [a, b]$, так как функции $\overline{X}_i$ линейно независимы. Разрешим и проинтегрируем (13):
$$C_i(t) = \psi_i(t) + S_i, \text{ где } S_i - \text{постоянные.}$$

Таким образом,

$$\overline{X} = \sum C_i(t)(\psi_i(t) + S_i). \tag{14}$$

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y, \\ \dot{y} = 6x + 3y. \end{cases}$$

Её общее решение (метод разобран ранее):

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение исходной системы (15) ищем в виде

$$\overline{X} = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Составим согласно (13) систему уравнений на функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\dot{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dot{C}_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} \\ -\dfrac{3}{e^t - 1} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} \dot{C}_1 + 2e^{-t}\dot{C}_2 = \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ -2\dot{C}_1 - 3e^{-t}\dot{C}_2 = -\dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_1 = 0, \\ \dot{C}_2 = \dfrac{e^t}{e^t - 1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = S_1, \\ C_2 = \ln|e^t - 1| + S_2, \end{cases}$$

где S_1, S_2 произвольные постоянные. Подставим $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в (16), получим общее решение исходной системы:

$$\overline{X} = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + S_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{-t} \ln|e^t - 1| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений методом вариации произвольных постоянных:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + \dfrac{e^{3t}}{e^t+1}, \\ \dot{y} = x - \dfrac{e^{3t}}{e^t+1}. \end{cases}$

Ответы:

1. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t} \arctan e^t$, $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t} \arctan e^t$.

2. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t|$, $y = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t$.

3. $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - 3e^{2t} + (3e^t + 4e^{2t}) \ln(e^t + 1)$, $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 3e^{2t} + (3e^t + 2e^{2t}) \ln(e^t + 1)$.

3 Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод неопределённых коэффициентов

Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{X}} = A\overline{X} + \overline{F} \tag{17}$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} и элементами свободного столбца $\overline{F}$ вида

$$f_i(t) = e^{\gamma t}(Q_{k_i}^{(i)}(t)\sin qt + P_{m_i}^{(i)}(t)\cos qt),\ \ i = 1\dots n, \tag{18}$$

где $Q_{k_i}^{(i)}(t),\ P_{m_i}^{(i)}(t)$ - многочлены степени k_i и m_i, соответственно; n - число уравнений в системе. В этом случае частное решение можно искать *методом неопределённых коэффициентов*. Частное решение $\overline{X}_{ch}$ подбирается по виду функций (неоднородностей) $f_i(t)$:

$$x_{ch}^{(i)} = e^{\gamma t}(M_{l+s}^{(i)}(t)\sin qt + N_{l+s}^{(i)}(t)\cos qt). \tag{19}$$

Число l есть максимальное значение $l = max\{k_i,\ m_i\}$. Параметр $s = 0$, если числа $\nu = \gamma \pm iq$ не являются корнями характеристического уравнения $|A - E\lambda| = 0$; в противном случае, s - их кратность. Число γ взято из показателя экспоненты, q - из аргументов косинуса и синуса из выражения (18) функции $f_i(t)$.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases} \tag{20}$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Собственные значения системы равны $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$, а общее решение:

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Подберём частное решение по виду неоднородности исходной системы. Функции $5\cos t$ соответствуют числа $\nu = \pm i$. Они не совпадает с собственными значениями $\lambda_{1,2}$, поэтому в формуле (19) параметр $s = 0$. Параметр $l = 0$, так как множитель 5 перед $\cos t$ есть полином нулевого порядка. Следовательно, частное решение ищем в виде $x_1 = A\cos t + B\sin t$, $y_1 = C\cos t + D\sin t$.

Определим постоянные A, B, C и D, для этого подставим x_1, y_1 в (20):

$$\begin{cases} -A\sin t + B\cos t = C\cos t + D\sin t - 5\cos t, \\ -C\sin t + D\cos t = 2A\cos t + 2B\sin t + C\cos t + D\sin t. \end{cases}$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в последних двух уравнениях. Это даёт систему

$$\begin{cases} \cos t:\ \ B = C - 5, \\ \cos t:\ \ D = 2A + C, \\ \sin t:\ \ -A = D, \\ \sin t:\ \ -C = 2B + D. \end{cases} \Rightarrow A = -1,\ B = -2,\ D = 1, C = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы (20):

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \overline{X}_1 = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases} \tag{21}$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы системы равны $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, общее решение:

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Определим частное решение исходной системы по виду неоднородностей $2e^t$ и $2t$. Функции e^t соответствует число $\nu_1 = 1$; для $2t$ число равно $\nu_2 = 0$. Числа ν_1 и ν_2 разные, значит будем искать частные решения для каждой неоднородности отдельно.

Рассмотрим неоднородность $2e^t$, найдём частное решение для системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases} \tag{22}$$

Так как число $\nu_1 = 1$ не совпадает с собственными значениями $\lambda_{1,2}$, то в формуле (19) параметр $s = 0$. Параметр $l = 0$, так как множитель 2 перед e^t есть полином нулевого порядка, тогда частное решение ищем в виде $x_1 = Ae^t$, $y_1 = Be^t$.

Найдём A и B, подставим x_1, y_1 в (22):

$$\begin{cases} Ae^t = 2Ae^t + e^t B + 2e^t, \\ Be^t = -2Ae^t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2A + B + 2, \\ B = -2A. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = -4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^t \\ Be^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -4e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим неоднородность $2t$ и систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases} \tag{23}$$

Так как число $\nu_2 = 0$ не совпадает с собственными значениями $\lambda_{1,2}$, то в формуле (19) параметр $s = 0$. Параметр $l = 1$, так как $2t$ есть полином первого порядка, поэтому частное решение ищем в виде $x_2 = At + B$, $y_2 = Ct + D$.

Найдём A, B, C и D, подставим x_2, y_2 в (23):

$$\begin{cases} A = 2At + 2B + Ct + D, \\ C = -2At - 2B + 2t. \end{cases}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} t: \ 2A + C = 0, \\ t: \ -2A + 2 = 0, \\ t^0: \ 2B + D = A, \\ t^0: \ -2B = C. \end{cases} \Rightarrow A = B = 1, \ D = -1, \ C = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ -2t - 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы (21):

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \overline{X}_1 + \overline{X}_2 = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + 1 \\ -2t - 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \tag{24}$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы равны $\lambda_{1,2} = \pm 1$, кратность их равна 1, значит общее решение:

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Подберём частное решение по виду неоднородности исходной системы. Функции $2e^t$ соответствует число $\nu = 1$, оно совпадает с собственным значением $\lambda_1 = 1$, поэтому в формуле (19) параметр s есть кратность корня λ_1, то есть $s = 1$. Параметр $l = 0$, так как множитель 2 перед e^t есть полином нулевого порядка. Частное решение ищем в виде $x_1 = e^t(At + B)$, $y_1 = e^t(Ct + D)$, подставим в (24):

$$\begin{cases} e^t(At + B) + e^t A = e^t(Ct + D) + 2e^t, \\ e^t(Ct + D) + e^t C = e^t(At + B). \end{cases}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{cases} t: \ A = C, \\ t: \ C = A, \\ t^0: \ B + A = D + 2, \\ t^0: \ D + C = B. \end{cases} \Rightarrow A = C = 1, \ B = 0, \ D = -1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы (24):

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \overline{X}_1 = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений методом неопределённых коэффициентов:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -2x + y + 18t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

Ответы:

1. $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t},\ y = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}.$

2. $x = C_1e^{3t} + C_2 + 3t^2 + 2t,\ y = -C_1e^{3t} + 2C_2 + 6t^2 - 2t - 2.$

3. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t,\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t.$

4. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t},\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}.$

4 Нелинейные системы дифференциальных уравнений

Систему линейных и нелинейных уравнений можно решить, сведя её к дифференциальному уравнению высшего порядка на одну из неизвестных функций.

Пример 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 z, \\ \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x} - yz^2. \end{cases} \tag{25}$$

Решение. Выразим z из первого уравнения системы и найдём производную z'_x:

$$z = \frac{y'_x}{y^2} \Rightarrow z'_x = \frac{y''_x y^2 - 2yy'^2_x}{y^4},$$

подставим во второе уравнение и проинтегрируем:

$$y''_x = \frac{y'^2_x}{y} + \frac{y'_x}{x} \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Определим z из первого уравнения (25): $z = \dfrac{y'_x}{y^2} = \dfrac{(C_2 e^{C_1 x^2})'_x}{(C_2 e^{C_1 x^2})^2} = \dfrac{2C_1 x e^{-C_1 x^2}}{C_2}$.
Общее решение:

$$y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \frac{2C_1 x e^{-C_1 x^2}}{C_2}.$$

Важно, что функция z определена из первого уравнения системы, без интегрирования. Если z определить из второго уравнения, то возникнет лишняя константа интегрирования, которую нужно будет доопределять.

Выше изложенный метод не всегда эффективный, возникает необходимость интегрировать уравнение высшего порядка. Удобно иногда использовать *метод интегрируемых комбинаций.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots x_n). \end{cases} \tag{26}$$

Определение 4.1. ***Интегрируемой комбинацией*** называется легко решаемое дифференциальное уравнение, которое является следствием системы (26).

Интегрируя комбинацию, получаем уравнение

$$\varphi(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C.$$

Функцию $\varphi(t, x_1, x_2, \dots x_n)$ или само уравнение называют *первым интегралом* системы (26). С помощью первого интеграла можно из системы уравнений исключить одну неизвестную функцию, что может существенно облегчить дальнейшее решение.

Если найти n независимых первых интегралов

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_1, \\ \varphi_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_2, \\ \dots \\ \varphi_n(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_n, \end{cases}$$

то неявно определим неизвестные функции $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$.

Условие независимости интегралов:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В системе уравнений (26) переменная t занимает особое положение как независимая. Это не всегда удобно для нахождения интегрируемых комбинаций. Поэтому имеет смысл переписать так систему:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \ldots x_n)}. \tag{27}$$

Такой запись системы называется *симметрической формой*. Здесь все переменные входят равноправно.

Для интегрирования системы (27) полезно знать свойство равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = r,$$

то при любых $k_1, k_2 \ldots k_n$ справедливо

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = r. \tag{28}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{z}, \\ \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{x}{y}. \end{cases} \tag{29}$$

Решение. Из уравнений следует:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{z} \Rightarrow dx = \frac{dy}{x/z}; \; \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{x/y}.$$

Отсюда симметрическая форма системы: $dx = \dfrac{dy}{x/z} = -\dfrac{dz}{x/y}$ или

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xy} = -\frac{dz}{xz}. \tag{30}$$

Второе равенство из (30) есть интегрируемая комбинация:

$$\frac{dy}{xy} = -\frac{dz}{xz} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{z} \Rightarrow yz = C_1.$$

Рассмотрим первое равенство из (30). Для его интегрирования используем найденный первый интеграл $yz = C_1$:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xy} \Rightarrow \frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{xy} \Rightarrow \frac{x^2}{2C_1} - \ln y = C_2 \Rightarrow \frac{x^2}{2yz} - \ln y = C_2.$$

Первые интегралы $yz = C_1$, $\dfrac{x^2}{2yz} - \ln y = C_2$ определяют общее решение системы уравнений (29).

Пример 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}. \tag{31}$$

Решение. Первая комбинация:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{z}{y} = C_1.$$

Далее, умножим на y числитель и знаменатель второй дроби (31), в третьей дроби – на z:

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{ydy}{y^2} = \frac{zdz}{z^2} \Rightarrow \frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy^2}{2y^2} = \frac{dz^2}{2z^2}.$$

Воспользуемся свойством равных дробей:

$$\frac{dx - dy^2 - dz^2}{x + y^2 + z^2 - 2y^2 - 2z^2} = \frac{dz^2}{2z^2} \Rightarrow \frac{d(x - y^2 - z^2)}{x - y^2 - z^2} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{x - y^2 - z^2}{z} = C_2.$$

Таким образом, общее решение:

$$\frac{z}{y} = C_1, \ \frac{x - y^2 - z^2}{z} = C_2.$$

Найти общие решения уравнений:

1. $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$.

2. $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$.

3. $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$.

Ответы:

1. $y^2 + z^2 = C_1,\ x(y - z) = C_2.$

2. $x - y = C_1(y - z),\ (x - z)^2(x + y + z) = C_2.$

3. $x + z = C_1,\ (x + y + z)(y - 3x - z) = C_2.$

Список литературы

[1] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

[2] Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд. РХД, 2000.

[3] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2002.