КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ СИММЕТРИИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

А. Е. ЗАЯЦ

КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ СИММЕТРИИ

Конспект лекций

Казань – 2013

УДК 530.1(075.8)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный
университет»

Учебно-методической комиссии Института физики
Протокол № 3 от 7 июня 2013 г.

заседания кафедры теории относительности и гравитации
Протокол № 5 от 17 мая 2013 г.

Рецензент: *доц. ИММ КФУ Попов А. А.*

А. Е. Заяц.
Классические калибровочные поля и их симметрии: Конспект лекций. — Казань, 2013. — 55 стр.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой вторую часть конспекта лекций по курсу «Калибровочные поля», читаемому магистрантам Института физики, обучающимся по направлению «Теоретическая и математическая физика». В нём рассмотрены свойства инстантонных и монопольных решений уравнений Янга-Миллса. Существенное внимание уделено понятию производной Ли и симметриям калибровочных полей.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов Института физики.

Содержание

Предисловие

Предлагаемое вниманию читателей учебно-методическое пособие представляет собой вторую часть конспекта лекций, посвящённых различным вопросам курса «Калибровочные поля», изучаемого магистрантами Института физики Казанского федерального университета.

Первая часть, вышедшая под названием «Введение в теорию классических полей», содержит изложение основных идей и понятий теории калибровочных полей, а также построение калибровочно инвариантного лагранжиана поля Янга–Миллса и получение с помощью вариационной процедуры уравнений Янга–Миллса.

Настоящее пособие призвано восполнить некоторый недостаток, присутствующий в настоящее время в учебной литературе, посвящённой классическим калибровочным полям. Так во всех известных автору учебниках, для того чтобы получить какое-либо точное решение уравнений Янга–Миллса (или Янга–Миллса–Хиггса), просто постулируется некий анзац[1], появление которого в достаточной степени не объясняется.

В связи с этим, в данном пособии мы уделяем большое внимание понятию производной Ли калибровочного поля и связанными с ним симметриями. В качестве примера использования этого подхода, нами получены решения уравнения самодуальности, симметричные относительно преобразований из групп $SO(3)$ и $SO(4)$ — монопольное решение Богомольного–Прасада–Соммерфильда и инстан-

[1] От нем. *Ansatz* — подход, основание, начало, исходная идея. Этим словом называют частный вид искомой величины (например, компоненты какого-либо поля), содержащий небольшое количество неизвестных функций, точный вид которых определяется при решении полевых уравнений.

тонное решение Белавина–Полякова–Шварца–Тюпкина.

При изложении материала лекций автором предполагалось, что читатель знаком с основами математического анализа, линейной алгебры, тензорного анализа, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и квантовой механики, а также с материалом, изложенным с первой части данного конспекта.

Обозначения и основные формулы

Цель этого раздела — ввести условные обозначения и дать сводку необходимых в дальнейшем формул.

На протяжении всех лекций мы будем иметь дело с плоским 4-мерным пространством-временем с координатами x^1, x^2, x^3, x^4, при этом последняя координата считается временно́й. Метрика такого пространства в общем виде задаётся с помощью тензора g_{ik}

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \,.$$

В зависимости от рассматриваемой модели эта метрика будет отождествляться либо с метрикой Минковского

$$ds_M^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \,,$$

либо с евклидовой метрикой

$$ds_E^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \,.$$

Используемый нами полностью антисимметричный постоянный тензор $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ в n-мерном пространстве определяется как

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ & \text{есть чётная перестановка } 1, 2, \ldots, n; \\ -1, & \text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ & \text{есть нечётная перестановка } 1, 2, \ldots, n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как следствие этого определения, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{1234} = 1$.

Для тензора $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ справедливо следующее тождество:

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = (-1)^S \begin{vmatrix} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_1} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_1} \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_2} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_2} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_2} \\ & & \ddots & \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_n} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_n} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где число S — количество знаков минус в сигнатуре метрики рассматриваемого пространства.

Также в данном пособии нами используются приведённые ниже обозначения:

1. Запись $f(x)$ означает, что функция f зависит от *всех* координат пространства, т. е. $f(x) \equiv f(x^1, x^2, x^3, x^4)$;

2. Для производной по координате x^m применяется символ ∂_m. В остальных случаях используются конструкции вида $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ или $\frac{df}{dr}$;

3. Напротив, штрих «$'$» всюду в тексте обозначает величину, полученную из исходной в результате некоторого калибровочного преобразования;

4. Для обозначения различных групп Ли применяются заглавные латинские буквы, в то время как для соответствующих им алгебр Ли — строчные готические: например, G и $\mathfrak{g}$, $SU(N)$ и $\mathfrak{su}(N)$ и т. д.;

5. Использование индексов в формулах настоящего пособия подчинено следующему правилу: латинские буквы из середины алфавита (i, k, m и т. д.) — для индексов, принимающих значения от 1 до 4, латинские буквы из начала алфавита (a, b, c и т. д.) — для индексов, пробегающих от 1 до 3. Кроме того, нами применяются строчные латинские буквы, записанные в скобках ((a), (b), (c) и т. д.), для обозначения групповых индексов и строчные греческие — для всех прочих случаев;

6. Различные матрицы, встречающиеся в тексте настоящего конспекта мы будем выделять, как правило, полужирным шрифтом. Для эрмитово сопряжённой и обратной матрицы к матрице $\mathbf{A}$ используются обозначения $\mathbf{A}^\dagger$ и $\mathbf{A}^{-1}$ соответственно. Матрица $\mathbf{A}$ является эрмитовой, если $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$, антиэрмитовой, если $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$, и унитарной, если $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Символом $\mathbf{I}_n$ мы будем обозначать единичную матрицу размера $n \times n$, если же уточнения её размера не требуется, или он ясен из контекста, то индекс n опускается. Коммутатор любых двух матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (а также любых двух операторов) определяется следующим стандартным соотношением: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Лекция 1

а. *Производная Ли*

Пусть задан некоторый объект T. Рассмотрим две близкие точки $P(x^1, \dots, x^n)$ и $\tilde{P}(y^1, \dots, y^n)$ на многообразии M_n и значения объектов $T(x)$ и $T(y)$ в этих точках. Наша задача — выяснить насколько сильно меняется объект T при переходе от точки P к точке $\tilde{P}$. Однако $T(y)$ и $T(x)$ как они есть, строго говоря, несравнимы, поскольку принадлежат различным множествам (например, если T — векторное поле, то различным касательным пространствам). Чтобы осуществить сравнение, нужно «переместить» $T(y)$ обратно в точку P некоторым естественным способом, получив величину $\tilde{T}(x)$, а затем проводить сравнение. Для тензорных полей указанный выше способ — это преобразование координат, подобранное так, чтобы точка $\tilde{P}$ перешла в точку P.

Пусть ξ — векторное поле, задающее направление перехода из точки P в точку $\tilde{P}$

$$y^\mu = x^\mu + \xi^\mu \epsilon + o(\epsilon), \quad \mu = 1, \dots, n\,, \tag{1.1}$$

где ϵ — малый параметр. Соответствующее обратное преобразование имеет вид

$$x^\mu = y^\mu - \xi^\mu \epsilon + o(\epsilon). \tag{1.2}$$

Производная Ли вдоль векторного поля ξ от объекта T, определяемая как

$$\pounds_\xi T = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\tilde{T}(x,\epsilon) - T}{\epsilon} = \left. \frac{d\tilde{T}(x,\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \tag{1.3}$$

задаёт скорость деформации T в направлении данного поля.

Если взять в качестве T тензорное поле типа (p, q), то для тензора $\tilde{T}$, являющегося результатом переноса тензора T из точки $\tilde{P}$ обратно в точку P, получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x,\epsilon) &= T^{\rho_1\ldots\rho_p}_{\sigma_1\ldots\sigma_q}(y)\cdot\frac{\partial y^{\sigma_1}}{\partial x^{\nu_1}}\ldots\frac{\partial y^{\sigma_q}}{\partial x^{\nu_q}}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\rho_1}}\ldots\frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial y^{\rho_p}} = \\ = T^{\rho_1\ldots\rho_p}_{\sigma_1\ldots\sigma_q}(y)&\left(\delta^{\sigma_1}_{\nu_1}+\partial_{\nu_1}\xi^{\sigma_1}\cdot\epsilon+o(\epsilon)\right)\ldots\left(\delta^{\mu_1}_{\rho_1}-\partial_{\rho_1}\xi^{\mu_1}\cdot\epsilon+o(\epsilon)\right)\ldots = \\ &= T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x)+\epsilon\left(\xi^\kappa\,\partial_\kappa T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}+T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\sigma_1\nu_2\ldots\nu_q}\,\partial_{\nu_1}\xi^{\sigma_1}+\ldots-\right.\\ &\qquad\left.-T^{\rho_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}\,\partial_{\rho_1}\xi^{\mu_1}-\ldots\right)+o(\epsilon),\end{aligned} \tag{1.4}$$

где учтено, что

$$T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}(y) = T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}(x)+\epsilon\,\xi^\kappa\,\partial_\kappa T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}+o(\epsilon).$$

Воспользовавшись определением (1.3), получаем, что производная Ли тензорного поля T равна

$$\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q} = \xi^\kappa\,\partial_\kappa T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}+T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\sigma_1\nu_2\ldots\nu_q}\,\partial_{\nu_1}\xi^{\sigma_1}+\ldots-T^{\rho_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q}\,\partial_{\rho_1}\xi^{\mu_1}-\ldots. \tag{1.5}$$

По построению производная Ли от тензора также является тензором, причём одной и той же с исходным тензором валентности.

В дальнейшем нам будут полезны частные случаи формулы (1.5) для производных Ли скаляра, тензоров первой и второй валентности:

$$\mathcal{L}_\xi T = \xi^\mu\,\partial_\mu T, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{L}_\xi T^\nu = \xi^\mu\,\partial_\mu T^\nu - T^\mu\,\partial_\mu\xi^\nu, \tag{1.7}$$

$$\mathcal{L}_\xi T_\nu = \xi^\mu\,\partial_\mu T_\nu + T_\mu\,\partial_\nu\xi^\mu, \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}_\xi T_{\nu\sigma} = \xi^\mu\,\partial_\mu T_{\nu\sigma} + T_{\mu\sigma}\,\partial_\nu\xi^\mu + T_{\mu\nu}\,\partial_\sigma\xi^\mu. \tag{1.9}$$

б. Симметрии тензорных полей

Пусть на рассматриваемом нами многообразии M_n действует группа автоморфизмов $H\colon M_n \to M_n$. Рассмотрим некоторую точку $P(x^1, \ldots, x^n)$ и пусть под действием преобразования $\mathsf{a} \in H$ она переходит в точку $\tilde{P}(y^1, \ldots, y^n)$. Будем считать, что данное преобразование мало отличается от тождественного. Тогда

$$y^\mu = \mathsf{a}(x)^\mu = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu + o(\epsilon). \tag{1.10}$$

Это выражение можно переписать в более удобных обозначениях, используя операторы, действующие на столбец из координат точки P

$$y = \mathsf{a}(x) = x + \epsilon\,\xi + o(\epsilon) = \left(\mathbf{I} + \epsilon\,\hat{\xi} + \ldots\right) x, \qquad \hat{\xi} \equiv \xi^\kappa\,\partial_\kappa. \tag{1.11}$$

Оператор $\hat{\xi}$ является элементом соответствующей группе H алгебры Ли $\mathfrak{h}$ с коммутатором, который вычисляется по правилу (индексы s и r здесь позволяют отличать различные элементы алгебры Ли $\mathfrak{h}$)

$$\left[\,\underset{s}{\hat{\xi}},\ \underset{r}{\hat{\xi}}\,\right] = \underset{s}{\hat{\xi}}\,\underset{r}{\hat{\xi}} - \underset{r}{\hat{\xi}}\,\underset{s}{\hat{\xi}} = \underset{[sr]}{\xi^\kappa}\,\partial_\kappa\,, \qquad \underset{[sr]}{\xi^\kappa} \equiv \underset{s}{\xi^\mu}\,\partial_\mu\,\underset{r}{\xi^\kappa} - \underset{r}{\xi^\mu}\,\partial_\mu\,\underset{s}{\xi^\kappa}. \tag{1.12}$$

Будем называть тензорное поле T *симметричным* относительно группы преобразований H, если производная Ли вдоль любого векторного поля ξ, такого, что $\hat{\xi} \in \mathfrak{h}$, равна нулю

$$\pounds_\xi T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_q} = 0. \tag{1.13}$$

Если T представляет собой метрический тензор, то векторные поля ξ, удовлетворяющие (1.13), называются полями Киллинга.

в. Производная Ли калибровочного поля

Рассмотрим теперь вопрос о симметриях калибровочных полей. Если попытаться перенести на поле $\mathbf{A}_i$ определение, данное в предыдущем разделе, мы тут же столкнёмся с трудностями — условие $\pounds_\xi \mathbf{A}_k = 0$ не обладает калибровочной инвариантностью. Это значит, что в одной калибровке потенциалы $\mathbf{A}_i$ обладают заданной симметрией, в то время как в другой калибровке симметрии нет.

Альтернативный вариант, в котором мы берём условие $\pounds_\xi \mathbf{F}_{km} = 0$, является удовлетворительным только для электродинамики (так как тензор Максвелла не зависит от выбора калибровки). В случае неабелевой калибровочной группы это условие опять не является инвариантным.

Всё сказанное выше связано с тем, что в определении производной Ли, приведённом ранее, нами не учитывалось, что при переносе исследуемого объекта из точки $\tilde{P}$ в точку P он может меняться под действием калибровочных преобразований.

Для того чтобы учесть это, рассмотрим инфинитезимальное калибровочное преобразование $\mathbf{U}(\epsilon) = \mathbf{I} - \epsilon\mathbf{W} + o(\epsilon)$, где ϵ — малый параметр, $\mathbf{W}$ — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определим, по аналогии с производной Ли тензорного поля, производную Ли вдоль однопараметрического семейства калибровочных преобразований $\mathbf{U}(\epsilon)$ как

$$\pounds_W \mathbf{A}_k \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathbf{A}'_k(\epsilon) - \mathbf{A}_k}{\epsilon} = \frac{d\mathbf{A}'_k(\epsilon)}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \tag{1.14}$$

где

$$\mathbf{A}'_k(\epsilon) = \mathbf{U}(\epsilon)^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{U}(\epsilon) + \mathbf{U}(\epsilon)^{-1}\partial_k\mathbf{U}(\epsilon).$$

Подставляя выражение для $\mathbf{U}(\epsilon)$ в эту формулу, получаем, что

$$\mathbf{A}'_k(\epsilon) = (\,\mathbf{I} + \epsilon\mathbf{W} + \ldots)\left[\mathbf{A}_k(\,\mathbf{I} - \epsilon\mathbf{W} + \ldots) + \partial_k(\mathbf{I} - \epsilon\mathbf{W} + \ldots)\right] =$$

$$= \mathbf{A}_k + \epsilon\,(\mathbf{W}\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k\mathbf{W}) - \epsilon\,\partial_k\mathbf{W} + \ldots\,,$$

откуда

$$\mathcal{L}_W\mathbf{A}_k = [\mathbf{W}, \mathbf{A}_k] - \partial_k\mathbf{W} = -\hat{D}_k\mathbf{W}\,. \tag{1.15}$$

Теперь мы имеем два типа производных Ли, и будет естественно объединить их для нахождения производной от потенциала калибровочного поля

$$\mathcal{L}_{\xi,W}\mathbf{A}_k \equiv \mathcal{L}_{\xi}\mathbf{A}_k + \mathcal{L}_W\mathbf{A}_k = \mathcal{L}_{\xi}\mathbf{A}_k - \hat{D}_k\mathbf{W}\,. \tag{1.16}$$

Будем называть калибровочное поле $\mathbf{A}_k$ *симметричным* относительно группы преобразований H, если производная Ли вдоль любого векторного поля ξ, такого, что $\hat{\xi} \in \mathfrak{h}$, удовлетворяет условию

$$\mathcal{L}_{\xi,W}\mathbf{A}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\xi}\mathbf{A}_k = \hat{D}_k\mathbf{W}. \tag{1.17}$$

Полученное выражение, фактически, означает, что деформация потенциала $\mathbf{A}_k$ как ковектора вдоль векторного поля ξ может быть компенсирована соответствующим образом подобранным калибровочным преобразованием вида $\mathbf{U}(\epsilon) = \mathbf{I} - \epsilon\mathbf{W} + o(\epsilon)$.

Проводя те же самые рассуждения для тензора $\mathbf{F}_{km}$, мы получаем, что

$$\mathcal{L}_W\mathbf{F}_{km} \equiv \left.\frac{d\mathbf{F}'_{km}(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{d\left(\mathbf{U}(\epsilon)^{-1}\mathbf{F}_{km}\mathbf{U}(\epsilon)\right)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = [\mathbf{W}, \mathbf{F}_{km}],$$

и, следовательно, условие симметричности тензора напряжённости будет иметь вид

$$\mathcal{L}_{\xi}\mathbf{F}_{km} = [\mathbf{F}_{km}, \mathbf{W}]\ . \tag{1.18}$$

Как легко показать, задавая калибровочное преобразование величины $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathbf{W}' = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1}\xi^k\partial_k\mathbf{U}, \tag{1.19}$$

оба условия (1.17) и (1.18) будут калибровочно инвариантными.

Если мы имеем несколько векторных полей $\underset{s}{\xi}$, то каждому из них будет соответствовать своя матрица $\mathbf{W}_s \in \mathfrak{g}$. Получившееся соответствие между векторными полями ξ (и связанными с ними операторами $\hat{\xi}$) и величинами $\mathbf{W}$ представляет собой линейное отображение $W : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ между алгебрами Ли:

$$W\left(\underset{s}{\hat{\xi}} + \underset{r}{\hat{\xi}}\right) = W\underset{s}{\hat{\xi}} + W\underset{r}{\hat{\xi}} = \mathbf{W}_s + \mathbf{W}_r,$$

$$W\left(\lambda \underset{s}{\hat{\xi}}\right) = \lambda\, W\underset{s}{\hat{\xi}} = \lambda\, \mathbf{W}_s, \qquad \lambda = \mathrm{const}.$$

Кроме того, если набор операторов $\left\{\underset{s}{\hat{\xi}}\right\}$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$, тогда

$$W\left(\left[\underset{s}{\hat{\xi}},\ \underset{r}{\hat{\xi}}\right]\right) = C^p{}_{sr}\mathbf{W}_p,$$

где $C^p{}_{sr}$ — соответствующие структурные постоянные. При этом, отображение W не обязательно является гомоморфизмом алгебр Ли, то есть

$$W\left(\left[\underset{s}{\hat{\xi}},\ \underset{r}{\hat{\xi}}\right]\right) \neq [\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_r].$$

г. *Интегрируемость условий симметрии*

Необходимо отметить, что величины $\mathbf{W}$ в формулах (1.17), (1.18) остаются, вообще говоря, произвольными. Они могут быть определены только из условий интегрируемости этих уравнений.

Производные Ли, стоящие в левых частях равенств (1.17) и (1.18), должны удовлетворять коммутационному соотношению

$$\left[\underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}},\ \underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}}\right] \equiv \underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}}\underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}} - \underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}}\underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}} = \underset{[sr]}{\mathcal{L}_{\xi}}\,. \tag{1.20}$$

Используя это, получаем условия совместности уравнений (1.17) и (1.18). Для уравнения на потенциалы калибровочного поля оно имеет вид

$$\hat{D}_k\left(\underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_r - \underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_s + [\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_r] - \mathbf{W}_{[sr]}\right) = 0, \tag{1.21}$$

для уравнения на напряжённости —

$$\left[\underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_r - \underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_s + [\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_r] - \mathbf{W}_{[sr]}, \mathbf{F}_{km}\right] = 0\,. \tag{1.22}$$

Здесь $\mathbf{W}_{[sr]}$ — матрица, соответствующая вектору $\underset{[sr]}{\xi}{}^{i}$.

Если требовать выполнения обоих полученных условий для всех, в том числе непараллельных, калибровочных полей, то мы приходим к следующему уравнению

$$\underset{s}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_r - \underset{r}{\mathcal{L}_{\xi}}\mathbf{W}_s + [\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_r] - \mathbf{W}_{[sr]} = 0\,. \tag{1.23}$$

Из соотношения (1.23) при заданных векторах $\underset{s}{\xi}{}^{i}$ можно определить величины $\mathbf{W}_s$, а затем уже из (1.17), (1.18) найти компоненты калибровочного поля.

В этой связи особый интерес для нас будут представлять решения уравнения (1.23), не зависящие от координат. В этом случае все выражения, содержащие производные, обращаются в нуль, и исследуемое уравнение принимает вид

$$\mathbf{W}_{[sr]} = [\mathbf{W}_s, \mathbf{W}_r]\,. \tag{1.24}$$

Так как матрица $\mathbf{W}_{[sr]}$ является образом коммутатора операторов $\underset{s}{\hat{\xi}}$ и $\underset{r}{\hat{\xi}}$, полученное соотношение означает, что введённое нами отображение $W : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ является *гомоморфизмом* алгебр Ли.

Очевидно, что требование независимости величин $\mathbf{W}_r$ от координат вовсе не является обязательным. Однако можно доказать, что в случаях, которые будут рассматриваться нами в следующих лекциях — $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(3)$, все решения (1.23) с помощью калибровочных преобразований можно свести к указанной ситуации. Доказательство этого утверждения достаточно трудоёмкое и нами приводиться не будет.

Лекция 2

а. Определение самодуального калибровочного поля

Уравнения Янга-Миллса существенно отличаются от уравнений Максвелла в электродинамике. Прежде всего, они нелинейны, то есть описывают взаимодействия различных компонент поля между собой. Кроме того, уравнения Янга-Миллса содержат наряду с тензором напряжённости также и потенциалы $\mathbf{A}_m$, которые зависят от выбора определённой калибровки.

В простейшем случае, когда потенциалы калибровочного поля параллельны, уравнения становятся линейными и сводятся к уравнениям, напоминающим уравнения Максвелла.

Если же не ограничивать себя требованием параллельности, то даже для уравнений Янга-Миллса без источников нахождение точных решений становится сложной и серьёзной задачей. Для того, чтобы решать подобные уравнения обычно делают какие-либо изначальные предположения о симметрии искомого поля, например сферической, цилиндрической и т.п.

Однако помимо этого, общего, подхода, в теории Янга-Миллса существует приём, который позволяет от собственно уравнений Янга-Миллса (уравнений второго порядка) перейти к более простым по структуре уравнениям первого порядка. Если предположить, что тензор напряжённости калибровочного поля пропорционален своему дуальному тензору

$$\mathbf{F}_{mn} = C\,\overset{*}{\mathbf{F}}_{mn}, \qquad C - \text{константа}, \tag{2.1}$$

то, принимая во внимание тождество Бьянки, получаем, что в указанном случае уравнения Янга-Миллса без источников удовлетворяются тождественно

$$\hat{D}_m \mathbf{F}^{mn} = C\,\hat{D}_m \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{mn} \equiv 0\,.$$

К сожалению, у условия (2.1) есть существенный недостаток — оно даёт существенные ограничения на сигнатуру рассматриваемого пространства. Чтобы это увидеть, умножим обе части этого равенства на $\frac{1}{2}\,\varepsilon^{pqmn}$ и свернём по индексам m и n:

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^{pqmn}\mathbf{F}_{mn} = \frac{1}{2}\,C\,\varepsilon^{pqmn}\overset{*}{\mathbf{F}}_{mn} \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{pq} = \frac{1}{4}\,C\,\varepsilon^{pqmn}\varepsilon_{mnik}\mathbf{F}^{ik} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{pq} = \frac{1}{2}\,C\,(-1)^S\left(\delta^p_i\delta^q_k - \delta^p_k\delta^q_i\right)\mathbf{F}^{ik} \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{pq} = (-1)^S\,C\,\mathbf{F}^{pq},$$

где S — количество знаков минус в сигнатуре метрики пространства. Отсюда получается, что для нетривиальности условия (2.1) необходимо, чтобы

$$C^2 = (-1)^S \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} C = \pm 1, \\ S - \text{чётное.} \end{cases} \tag{2.2}$$

В пространстве-времени Минковского ($S = 1$) указанный подход ничего, за исключением тривиального случая $\mathbf{F}_{mn} = 0$, не даёт, в то время как для решения уравнений Янга-Миллса на фоне евклидова пространства ($S = 0$) он превращается в мощный инструмент.

В дальнейшем будем говорить, что калибровочное поле является *самодуальным*, если оно удовлетворяет уравнению

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{mn} = \mathbf{F}_{mn}\,, \tag{2.3}$$

и *антисамодуальным*, если оно удовлетворяет уравнению

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{mn} = -\mathbf{F}_{mn}\,. \tag{2.4}$$

Несмотря на то, что эти уравнения значительно проще уравнения Янга-Миллса, они также являются нелинейными и для получения их точных решений придётся привлекать различные дополнительные соображения.

В следующих разделах мы рассмотрим наиболее известные точные решения уравнений (2.3) и (2.4) — инстантоны и самодуальные монополи.

б. Инстантоны в квантовой механике

В квантовой механике есть два мощных метода приближенных расчетов: метод теории возмущений и квазиклассическое приближение. В квантовой теории поля метод теории возмущений играет большую роль, являясь в квантовой электродинамике основным рабочим методом, позволяющим производить расчеты с огромной точностью. В теории сильных взаимодействий, квантовой хромодинамике, теория возмущений справедлива лишь в области асимптотической свободы, то есть при больших переданных импульсах. При малых переданных импульсах, то есть на больших расстояниях, взаимодействие становится сильным и необходимо применять другие методы. Одним из них является метод инстантонов, являющийся обобщением квазиклассического метода квантовой механики на квантовую теорию поля.

Хорошо известно, что квантово-механическое проникновение через потенциальный барьер описывается амплитудой, которая в квазиклассическом приближении пропорциональна

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int\limits_a^b |p|\,dx\right), \tag{2.5}$$

где a и b — границы барьера, $|p| = \sqrt{2m\,(V-E)}$ — модуль импульса частицы под барьером $V = V(x)$, а E — её энергия. Сам импульс — мнимая величина, так как $V > E$:

$$p = i\sqrt{2m\,(V - E)}, \tag{2.6}$$

а это значит, что прохождение под барьером можно рассматривать как классическое движение в мнимом времени $t \to it$.

В квантовой механике можно рассматривать прохождение барьера из основного состояния («вакуума») в другое основное состояние (другой «вакуум») для двойной ямы. Ему соответствует классическое движение в мнимом времени с $E = 0$ между двумя ямами за бесконечный промежуток времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, но с конечным действием. Такое решение в механике называется *инстантоном*.

Аналогично описанной выше ситуации, можно определить инстантоны в теории поля как решения в евклидовом пространстве (с мнимым временем), описывающие «туннелирование» между вакуумными состояниями ($\mathbf{F}_{mn} = 0$).

в. Теорема Гаусса

Центральную роль в понимании топологии калибровочных полей для нас будет играть теорема Гаусса (о дивергенции) для интегралов в n-мерном пространстве.

Пусть M_n — область n-мерного пространства и ∂M_n — $(n-1)$-мерное подмножество, которое является границей M_n. Положение точек на поверхности ∂M_n может быть задано при помощи $n-1$ параметра ζ_α, $\alpha = 1, \ldots, n-1$. Уравнение, описывающее поверхность ∂M_n, в этом случае будет иметь вид

$$x^\mu = x^\mu(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}), \qquad \mu = 1, \ldots, n.$$

Тогда, согласно теореме Гаусса, интеграл от дивергенции вектора J^μ по области M_n можно заменить интегралом по поверхности ∂M_n:

$$\int\limits_{M_n} \partial_\mu J^\mu \, d^n x = \int\limits_{\partial M_n} J^\mu \, d^{n-1}\sigma_\mu \,. \tag{2.7}$$

В приведённой формуле используются следующие обозначения:

$$d^n x \equiv dx^1 \, dx^2 \ldots dx^n \,, \quad d^{n-1}\zeta = d\zeta_1 \, d\zeta_2 \ldots d\zeta_{n-1} \,,$$

$$d^{n-1}\sigma_\mu \equiv \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon_{\mu\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \zeta_{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial x^{\nu_{n-1}}}{\partial \zeta_{\alpha_{n-1}}} \, d^{n-1}\zeta \,.$$

Кроме того, полезно будет напомнить, что для 3-мерного и 4-мерного евклидового пространства элементы объёма d^3x и d^4x могут быть записаны как

$$d^3x = r^2 dr d^2\Omega_2 \,, \quad d^4x = R^3 dR d^3\Omega_3 \,,$$

где

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad R = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2},$$

а $d^2\Omega_2$, $d^2\Omega_3$ — элементы соответствующих телесных углов, причём

$$\int d^2\Omega_2 = 4\pi \,, \quad \int d^3\Omega_3 = 2\pi^2 \,.$$

г. *Соглашение об использовании индексов*

Будем считать, что мы сделали переход к мнимому времени, то есть метрика пространства положительно определена, причём $g_{km} = \delta_{km}$. Так как в этом случае нет особого смысла делать различие между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, мы далее будем использовать только нижние пространственные индексы:

$$x^m \longrightarrow x_m\,, \quad \mathbf{F}^{km} \longrightarrow \mathbf{F}_{km} \quad \text{и т. д.}$$

В качестве калибровочной группы мы возьмём, как самую простейшую из нетривиальных, группу $SU(2)$. Для этой калибровочной группы поднятие и опускание групповых индексов также осуществляется с помощью символа Кронекера

$$\mathcal{G}_{(a)(b)} = \delta_{(a)(b)}\,,$$

в дальнейшем и для них мы не будем различать верхние и нижние индексы, а суммирование будет предполагаться по любой паре повторяющихся. Кроме того, так как групповые индексы в данном случае принимают значения от 1 до 3, мы, начиная с этой лекции, для простоты не будем использовать скобки для их обозначения:

$$\mathbf{t}_{(a)} \longrightarrow \mathbf{t}_a\,, \quad A_m^{(a)} \longrightarrow A_m^a\,, \quad F_{km}^{(a)} \longrightarrow F_{km}^a \quad \text{и т. д.}$$

д. *Инстантоны в модели Янга-Миллса*

Если предполагать, что действие, вычисленное нами для искомых решений, является конечным, функции F_{km}^a должны быть регулярными во всём пространстве и стремиться к нулю на бесконечности, то есть, когда $R \to \infty$.

Изучение свойств инстантонов начнём с простого неравенства:

$$\frac{1}{8}\int d^4x \left(F_{km}^a - \overset{*}{F}{}_{km}^a\right)\left(F_{km}^a - \overset{*}{F}{}_{km}^a\right) \geqslant 0, \tag{2.8}$$

из которого следует, что

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}\int d^4x\; F_{km}^a F_{km}^a \geqslant \frac{1}{4}\int d^4x F_{km}^a \overset{*}{F}{}_{km}^a, \tag{2.9}$$

так как $\overset{*}{F}{}^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = F^a_{km}F^a_{km}$ (в евклидовом пространстве). В неравенствах (2.8) и (2.9) знак равенства достигается только для самодуальных калибровочных полей $F^a_{km} = \overset{*}{F}{}^a_{km}$.

Аналогично можно рассмотреть неравенство

$$\frac{1}{8}\int d^4x \left(F^a_{km} + \overset{*}{F}{}^a_{km}\right)\left(F^a_{km} + \overset{*}{F}{}^a_{km}\right) \geqslant 0, \tag{2.10}$$

из которого следует, что

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{km}F^a_{km} \geqslant -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km}, \tag{2.11}$$

причём знак равенства достигается здесь только для антисамодуальных калибровочных полей $F^a_{km} = -\overset{*}{F}{}^a_{km}$.

Необходимо отметить, что интеграл, стоящий в левых частях неравенств (2.9) и (2.11) всегда является положительной величиной (кроме тривиального случая $F^a_{km} \equiv 0$), в то время как знак интеграла в правых частях неопределён. Так как данные неравенства становятся нетривиальными, только если их правая часть положительна, они могут быть объединены в одно неравенство вида

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{km}F^a_{km} \geqslant \frac{1}{4}\left|\int d^4x\, F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km}\right|, \tag{2.12}$$

где знак равенства достигается только для самодуальных и антисамодуальных полей.

Рассмотрим теперь более подробно интеграл в правой части (2.12). Можно доказать, что подынтегральное выражение представляет собой 4-дивергенцию некоторого вектора:

$$F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = \frac{1}{g^2}\,\partial_k J_k, \tag{2.13}$$

где

$$J_k = -2\,\varepsilon_{kmpq}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}_m\mathbf{F}_{pq} - \frac{2}{3}\,\mathbf{A}_m\mathbf{A}_p\mathbf{A}_q\right). \qquad (2.14)$$

Перейдём с помощью теоремы Гаусса от интегрирования по всему 4-пространству к поверхностному интегралу по сфере S^3_∞ бесконечного радиуса:

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = \frac{1}{4g^2}\int\limits_{S^3_\infty} d^3\sigma_k\, J_k. \qquad (2.15)$$

Для дальнейших вычислений является важным, что функционал действия $\mathcal{S}$ конечен, то есть на бесконечности компоненты тензора напряжённости обращаются в нуль, и, следовательно, компоненты потенциала имеют вид

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U}, \qquad (2.16)$$

где $\mathbf{U}$ — произвольная унитарная матрица с определителем, равным единице, так что

$$\mathbf{U} = V_4(x)\,\mathbf{I} + 2\,\mathbf{t}_a V_a(x), \qquad V_k V_k = 1. \qquad (2.17)$$

Из равенств (2.16) и (2.17) следует, что на бесконечности

$$J_k = \frac{4}{3}\,\varepsilon_{kmpq}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}^{-1}\partial_m\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\partial_p\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\partial_q\mathbf{U}\right) =$$
$$= \frac{8}{3}\,\varepsilon_{kmpq}\,\varepsilon_{nrst}\,V_n\,\partial_m V_r\,\partial_p V_s\,\partial_q V_t\,. \qquad (2.18)$$

Сфера S^3_∞ может быть параметризована тремя параметрами ζ_α ($\alpha = 1,\ 2,\ 3$). Элемент объёма в таком случае запишется в виде

$$d^3\sigma_k = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{kmpq}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^m}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\frac{\partial x^p}{\partial\zeta_\beta}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial\zeta_\gamma}\,d^3\zeta. \qquad (2.19)$$

Подставляя выражения (2.18) и (2.19) в (2.15), получаем

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = \frac{2}{3g^2}\int d^3\zeta\, \varepsilon_{kmpq}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}V_k\frac{\partial V_m}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\frac{\partial V_p}{\partial\zeta_\beta}\cdot\frac{\partial V_q}{\partial\zeta_\gamma}\,.$$

Легко проверить, что подынтегральное выражение в правой части удовлетворяет тождеству

$$\left[\varepsilon_{kmpq}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}V_k\frac{\partial V_m}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\frac{\partial V_p}{\partial\zeta_\beta}\cdot\frac{\partial V_q}{\partial\zeta_\gamma}\right]^2 = 36\ \det\left(\frac{\partial V_k}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\frac{\partial V_k}{\partial\zeta_\beta}\right), \qquad (2.20)$$

где полученный определитель представляется собой определитель метрического тензора на единичной сфере, заданной равенством $V_kV_k = 1$.

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, F^{(a)}_{km}\overset{*}{F}{}^{(a)}_{km} = \pm\frac{4}{g^2}\int d^3\zeta\sqrt{\det\left(\frac{\partial V_k}{\partial\zeta_\alpha}\cdot\frac{\partial V_k}{\partial\zeta_\beta}\right)} = \pm\frac{8\pi^2 n}{g^2}, \qquad (2.21)$$

где n — целое неотрицательное число, так как, в то время как точка $(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ пробегает по сфере S^3_∞ один раз, вектор V_k может пробегать сферу $V_kV_k = 1$ n раз, каждый раз давая вклад в виде 4-мерного телесного угла $2\pi^2$.

Таким образом, из (2.12) и (2.21) для функционала действия имеет место неравенство:

$$\mathcal{S} \geqslant \frac{8\pi^2 n}{g^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.22)$$

Знак равенства достигается только для калибровочных полей, удовлетворяющих условию $\mathbf{F}_{km} = \pm\overset{*}{\mathbf{F}}_{km}$ и реализующих, следовательно, абсолютные минимумы действия. Такие поля, по аналогии с квантовой механикой, называются инстантонами.

Лекция 3

а. *Классификация инстантонных решений*

Как было показано в предыдущем разделе, инстантонные решения уравнений Янга-Миллса представляют собой (анти)самодуальные калибровочные поля, с тензором напряжённости, обращающимся в нуль при $R \to \infty$, функционал действия на которых достигает своего минимума.

Различные инстантонные решения удобно различать между собой, используя понятие топологического заряда

$$q = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \, F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km}, \tag{3.1}$$

который принимает значения из множества целых чисел. Для нетривиальных самодуальных калибровочных полей топологический заряд является положительным ($q = +n$), для антисамодуальных полей, соответственно, отрицательным ($q = -n$). В тривиальном случае, когда $F^a_{km} \equiv 0$, заряд, разумеется, равен нулю.

Решение уравнений Янга-Миллса будем называть n-инстантонным, если оно удовлетворяет условию самодуальности (2.3) и имеет топологический заряд, равный n. Аналогично определяется и n-антиинстантонное решение, как удовлетворяющее условию антисамодуальности (2.4) и имеющее топологический заряд $q = -n$.

Строго говоря, приведённые ранее рассуждения вовсе не гарантируют существование самих инстантонных решений. Эта задача может быть решена только путём явного их построения. В дальнейшем, используя свойства симметрии калибровочных полей, мы получим явные выражения 1-инстантонного и 1-антиинстантонного решений.

б. Тензоры 'т Хофта.

Впервые явное инстантонное решение в евклидовом пространстве для $n = 1$ было получено Белавиным, Поляковым, Шварцем и Тюпкиным (коротко, БПШТ). Для определения решения БПШТ удобно ввести так называемые тензоры 'т Хофта $\boldsymbol{\eta}_{mn}$ и $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{mn}$.

Определим следующие матричные векторы:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \begin{cases} \mathbf{I}, k = 4, \\ -i\boldsymbol{\tau}_a, k = a = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^+ = \begin{cases} \mathbf{I}, k = 4, \\ i\boldsymbol{\tau}_a, k = a = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{3.3}$$

удовлетворяющие тождествам

$$\boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_m^+ + \boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\sigma}_k^+ = \boldsymbol{\sigma}_k^+ \boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_m^+ \boldsymbol{\sigma}_k = 2\,\mathbf{I} \cdot \delta_{km}. \tag{3.4}$$

Тензоры 'т Хофта определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta}_{km} = -\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{\sigma}_k^+ \boldsymbol{\sigma}_m - \boldsymbol{\sigma}_m^+ \boldsymbol{\sigma}_k\right), \tag{3.5}$$

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_{km} = -\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_m^+ - \boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\sigma}_k^+\right), \tag{3.6}$$

или в явном виде ($a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ 3$)

$$\boldsymbol{\eta}_{a4} = -\bar{\boldsymbol{\eta}}_{a4} = \mathbf{t}_a, \quad \boldsymbol{\eta}_{ab} = \bar{\boldsymbol{\eta}}_{ab} = \varepsilon_{abc}\,\mathbf{t}_c. \tag{3.7}$$

Непосредственно из данного определения вытекает, во-первых, что $\boldsymbol{\eta}_{km}$ и $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{km}$ являются элементами алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ и, во-вторых, что построенные величины удовлетворяют, соответственно, условиям самодуальности и антисамодуальности

$$\boldsymbol{\eta}_{km} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{kmpq}\boldsymbol{\eta}_{pq}, \tag{3.8}$$

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_{km} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{kmpq}\bar{\boldsymbol{\eta}}_{pq}. \tag{3.9}$$

Следовательно, если принять, что тензор напряжённости калибровочного поля пропорционален одной из них, то уравнение (2.3) (или (2.4)) будет удовлетворено автоматически.

К сожалению, выполнение условия (анти)самодуальности само по себе совершенно не гарантирует существование подходящего калибровочного потенциала $\mathbf{A}_k$.

Заметим также, что выполнение любого из условий (2.3) или (2.4) не обязательно влечёт за собой пропорциональность тензора напряжённости $\mathbf{F}_{km}$ одному из тензоров 'т Хофта. Тем не менее, требование

$$\mathbf{F}_{km} \sim \boldsymbol{\eta}_{km} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_{km} \sim \bar{\boldsymbol{\eta}}_{km}$$

является простейшим из возможных.

В заключении, приведём список тождеств, которым удовлетворяют тензоры 'т Хофта $\boldsymbol{\eta}_{km}$ и $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{km}$, а также соответствующие им коэффициенты разложения по базису алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ ($\boldsymbol{\eta}_{km} = \eta^a_{km}\mathbf{t}_a$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}_{km} = \bar{\eta}^a_{km}\mathbf{t}_a$):

$$\left[\boldsymbol{\eta}_{mn}, \boldsymbol{\eta}_{pq}\right] = \varepsilon_{snpq}\boldsymbol{\eta}_{ms} - \varepsilon_{mspq}\boldsymbol{\eta}_{sn}, \tag{3.10}$$

$$[\boldsymbol{\eta}_{mq}, \boldsymbol{\eta}_{pq}] = 2\,\boldsymbol{\eta}_{mp}, \tag{3.11}$$

$$\left[\bar{\boldsymbol{\eta}}_{mn}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_{pq}\right] = -\varepsilon_{snpq}\bar{\boldsymbol{\eta}}_{ms} + \varepsilon_{mspq}\bar{\boldsymbol{\eta}}_{sn}, \tag{3.12}$$

$$[\bar{\boldsymbol{\eta}}_{mq}, \bar{\boldsymbol{\eta}}_{pq}] = 2\,\bar{\boldsymbol{\eta}}_{mp}, \tag{3.13}$$

$$\eta^a_{kq}\eta^a_{pq} = 3\,\delta_{kp}, \tag{3.14}$$

$$\eta^a_{pq}\eta^a_{pq} = \bar{\eta}^a_{pq}\bar{\eta}^a_{pq} = 12, \tag{3.15}$$

$$\eta^a_{km}\eta^b_{km} = \bar{\eta}^a_{km}\bar{\eta}^b_{km} = 4\,\delta_{ab}, \tag{3.16}$$

$$\eta^a_{km}\bar{\eta}^b_{km} = 0. \tag{3.17}$$

в. $SO(4)$-симметрия

Для получения явного инстантонного решения БПШТ используем одно упрощающее предположение: мы будем искать решение, симметричное относительно вращений в 4-мерном евклидовом пространстве, то есть преобразований из группы $SO(4)$. Операторы, образующие базис соответствующей алгебры Ли, имеют вид

$$\underset{14}{\hat{\xi}} = x_3\partial_2 - x_2\partial_3\,, \quad \underset{24}{\hat{\xi}} = x_1\partial_3 - x_3\partial_1\,, \quad \underset{34}{\hat{\xi}} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2\,,$$

$$\underset{23}{\hat{\xi}} = x_4\partial_1 - x_1\partial_4\,, \quad \underset{31}{\hat{\xi}} = x_4\partial_2 - x_2\partial_4\,, \quad \underset{12}{\hat{\xi}} = x_4\partial_3 - x_3\partial_4\,.$$

Здесь для нумерации операторов из соображений удобства используется не один, а пара антикоммутирующих между собой индексов. Благодаря такому подходу, все шесть базисных операторов могут быть записаны с помощью одной формулы

$$\underset{pq}{\hat{\xi}} = \underset{pq}{\xi}{}^m\partial_m = \varepsilon_{pqmn}x_n\partial_m, \qquad p,\ q = 1,\dots,4. \tag{3.18}$$

Коммутационные соотношения для них выглядят следующим образом

$$\left[\underset{mn}{\hat{\xi}}\,,\underset{pq}{\hat{\xi}}\right] = \varepsilon_{snpq}\underset{ms}{\hat{\xi}} - \varepsilon_{mspq}\underset{sn}{\hat{\xi}}\,. \tag{3.19}$$

Для нахождения матриц $\mathbf{W}_{mn} \in \mathfrak{su}(2)$, соответствующих операторам $\underset{mn}{\hat{\xi}} \in \mathfrak{so}(4)$, необходимо решить уравнение (1.23). Как было указано в лекции 1, если величины $\mathbf{W}_{mn}$ не зависят от координат $(x_1,\dots,x_4)$ и отображение $W:\mathfrak{so}(4)\to\mathfrak{su}(2)$ является гомоморфизмом, то условие (1.23) выполняется тождественно.

Воспользуемся этим и подберём элементы алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ так, чтобы они удовлетворяли коммутационным соотношениям вида (3.19). Это несложно сделать, учитывая тождество (3.11):

$$\mathbf{W}_{mn} = W\underset{mn}{\hat{\xi}} = \boldsymbol{\eta}_{mn} \,. \tag{3.20}$$

г. Решение БПШТ

Используя полученный результат, найдём $SO(4)$-симметричное выражение для потенциалов калибровочного поля $\mathbf{A}_k$. Для это запишем условие симметрии

$$\pounds_{\underset{pq}{\xi}} \mathbf{A}_k = \varepsilon_{pqmn} x_n \, \partial_m \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_m \varepsilon_{pqmk} = \left[\mathbf{A}_k, \boldsymbol{\eta}_{pq}\right] \tag{3.21}$$

и свернём его с x_q

$$\mathbf{A}_m \varepsilon_{pqmk} x_q = [\mathbf{A}_k, \boldsymbol{\eta}_{pq} x_q] \,.$$

Пусть $k = p$, тогда

$$[\mathbf{A}_k, \boldsymbol{\eta}_{kq} x_q] = 0 \qquad \text{(суммирования по } k \text{ нет!)} \,.$$

Отсюда

$$\mathbf{A}_k = \alpha_k \, \boldsymbol{\eta}_{kq} x_q \qquad \text{(суммирования по } k \text{ нет!)} \,,$$

где α_k — некоторые, вообще говоря, различные множители.

Пусть теперь $k \neq p$, тогда из антисимметричности левой части относительно перестановки этих индексов следует, что

$$[\mathbf{A}_k, \boldsymbol{\eta}_{pq} x_q] + [\mathbf{A}_p, \boldsymbol{\eta}_{kq} x_q] = 0$$

или

$$(\alpha_k - \alpha_p) \, [\boldsymbol{\eta}_{ks} x_s, \boldsymbol{\eta}_{pq} x_q] = 0 \qquad \text{(суммирования по } k \text{ и } p \text{ нет!)} \,.$$

Так как второй сомножитель отличен от нуля при $k \neq p$, то $\alpha_k = \alpha_p = \alpha$. Следовательно,

$$\mathbf{A}_k = \alpha\, \boldsymbol{\eta}_{kq} x_q \,. \tag{3.22}$$

Подставляя полученное выражение в условие симметрии (3.21) и используя тождество (3.11), получаем

$$\varepsilon_{pqmn} x_n\, \partial_m \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(R),\ R = \sqrt{x_m x_m}\,.$$

Таким образом, калибровочное поле является $SO(4)$-симметричным, если его потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}_k = \alpha(R)\, \boldsymbol{\eta}_{kq} x_q \,. \tag{3.23}$$

Найдём теперь компоненты тензоров $\mathbf{F}_{km}$ и $\overset{*}{\mathbf{F}}_{km}$:

$$\mathbf{F}_{km} = \left(-2\alpha + R^2\alpha^2\right)\, \boldsymbol{\eta}_{km} + \left(\frac{d\alpha}{dR} + R\alpha^2\right) \cdot (x_k \boldsymbol{\eta}_{ms} - x_m \boldsymbol{\eta}_{ks}) \frac{x_s}{R}\,, \tag{3.24}$$

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{km} = -\left(2\alpha + R\,\frac{d\alpha}{dR}\right) \boldsymbol{\eta}_{km} - \left(\frac{d\alpha}{dR} + R\alpha^2\right) \cdot (x_k \boldsymbol{\eta}_{ms} - x_m \boldsymbol{\eta}_{ks}) \frac{x_s}{R}\,. \tag{3.25}$$

Отсюда из условия самодуальности получаем

$$\mathbf{F}_{km} = \overset{*}{\mathbf{F}}_{km} \ \Rightarrow\ \left(\frac{d\alpha}{dR} + R\alpha^2\right) \left[R\, \boldsymbol{\eta}_{km} + 2(x_k \boldsymbol{\eta}_{ms} - x_m \boldsymbol{\eta}_{ks}) \frac{x_s}{R}\right] = 0\,.$$

Поскольку второй сомножитель в левой части полученного равенства отличен от нуля, то

$$\frac{d\alpha}{dR} + R\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{R^2 + \lambda^2}\,, \tag{3.26}$$

где λ^2 — константа интегрирования, принимающая только положительные значения, так как в противном случае искомое решение будет сингулярным.

Подставляя найденные выражения в (3.23) и (3.24), получаем явные формулы для потенциала и напряжённости калибровочного поля инстантона

$$\mathbf{A}_k = \frac{2\,\boldsymbol{\eta}_{ks}x_s}{R^2+\lambda^2}\,, \qquad \mathbf{F}_{km} = -\frac{4\,\lambda^2\,\boldsymbol{\eta}_{km}}{(R^2+\lambda^2)^2}\,, \tag{3.27}$$

или

$$A^a_k = \frac{2}{g}\cdot\frac{\eta^a_{ks}x_s}{R^2+\lambda^2}\,, \qquad F^a_{kl} = -\frac{4}{g}\cdot\frac{\lambda^2\,\eta^a_{kl}}{(R^2+\lambda^2)^2}\,. \tag{3.28}$$

Топологический заряд для данной конфигурации может быть вычислен напрямую из (3.1)

$$q = \frac{g^2}{32\pi^2}\int d^4x\; F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = \frac{\lambda^4}{2\pi^2}\int d^4x\;\frac{\eta^a_{km}\eta^a_{km}}{(R^2+\lambda^2)^4} =$$

$$= 12\lambda^4\int\limits_0^{+\infty} dR\;\frac{R^3}{(R^2+\lambda^2)^4} = 1. \tag{3.29}$$

Следовательно, мы имеем явную реализацию 1-инстантонного решения уравнений Янга-Миллса. Данное решение можно обобщить, если в качестве центра симметрии взять не начало координат, а произвольную точку с координатами $(c_1,\ldots,c_4)$. В этом случае мы получаем полное 1-инстантонное решение БПШТ, зависящее от 5 параметров $c_1,\ldots,c_4,\lambda$, не исчезающих при калибровочных преобразованиях и связанных с положением и масштабом инстантона

$$\mathbf{A}_k = 2\cdot\frac{\boldsymbol{\eta}_{km}\,(x_m-c_m)}{R^2+\lambda^2}\,, \qquad \mathbf{F}_{km} = -4\cdot\frac{\boldsymbol{\eta}_{km}\lambda^2}{\left(R^2+\lambda^2\right)^2}\,,$$

$$R^2 = (x_m-c_m)\,(x_m-c_m)\,. \tag{3.30}$$

Выражение для полного 1-антиинстантонного решения можно получить, если в (3.30) заменить один тензор 'т Хофта на другой

$$\mathbf{A}_k = 2 \cdot \frac{\bar{\eta}_{km}\,(x_m - c_m)}{R^2 + \lambda^2}\,, \qquad \mathbf{F}_{km} = -4 \cdot \frac{\bar{\eta}_{km}\lambda^2}{\left(R^2 + \lambda^2\right)^2}\,. \tag{3.31}$$

Это решение также является $SO(4)$-симметричным, но при этом $\mathbf{W}_{pq} = -\bar{\eta}_{pq}$.

Лекция 4

a. *Введение*

Понятие магнитного монополя как изолированного точечного источника магнитного поля было введено Дираком. Электричество и магнетизм участвуют в уравнениях Максвелла на равных основаниях, но электрические заряды возникают естественным образом, магнитные же заряды, или монополи, — нет. Тем не менее, постулируя их существование, Дирак предложил убедительный (и едва ли не единственный) аргумент, объясняющий квантование электрического заряда, то есть тот факт, что электрические заряды всегда являются целыми кратными некоторого фиксированного заряда (заряда электрона).

После появления неабелевых калибровочных теорий, в которых группа $U(1)$ максвелловской теории расширяется до какой-либо неабелевой группы, например до $SU(2)$, ’т Хофт и Поляков обнаружили, что существуют гладкие полевые конфигурации калибровочных полей с введённым дополнительно скалярным полем, которые на больших расстояниях ведут себя как монополи Дирака. По существу оказалось, что нелинейные уравнения, обобщающие линейные уравнения Максвелла, допускают решения солитонного типа, в которых сингулярная точечная частица Дирака заменяется гладкой полевой конфигурацией, приближенно локализованной в точке, где находилась частица.

Монополь ’т Хофта-Полякова описан лишь численно. Однако имеется упрощённая модель, введённая Прасадом и Соммерфильдом и дополненная Богомольным, в которой найдены явные решения для случая одного монополя.

Они называются монополями Богомольного-Прасада-Соммерфильда, или БПС-монополями.

Способ построения монопольных решений основан на связи уравнений Богомольного с уравнениями самодуальности. Было обнаружено, что хотя мы ищем статические решения системы полей Янга-Миллса-Хиггса в пространстве Минковского, уравнения Богомольного на самом деле эквивалентны независящим от мнимого времени самодуальным уравнениям Янга-Миллса в евклидовом 4-мерном пространстве.

б. Модель Янга-Миллса-Хиггса

Рассмотрим модель, состоящую из взаимодействующих полей Янга-Миллса и скалярного поля Хиггса:

$$\mathcal{L}_{\text{ЯМХ}} = \frac{1}{4} F^a_{km} F^{a\,km} + \frac{1}{2} \hat{D}_k \phi^a \, \hat{D}^{\,k} \phi^a + V(\phi). \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\phi} = \phi^a \mathbf{t}_a$ — скалярное поле Хиггса, потенциальная энергия самодействия которого

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(v^2 - \phi^2\right)^2, \qquad \phi^2 = \phi^a \phi^a, \tag{4.2}$$

зависит от квадрата вектора ϕ^a, а производная поля ϕ^a имеет вид

$$\hat{D}_k \phi^a = \partial_k \phi^a + g \varepsilon_{abc} A^b_k \phi^c. \tag{4.3}$$

Запишем теперь уравнения калибровочного поля в модели Хиггса:

$$\hat{D}_k F^{a\,km} = g \varepsilon_{abc} \phi^b \hat{D}^{\,m} \phi^c. \tag{4.4}$$

Для самого поля Хиггса получим уравнение

$$\hat{D}_k \hat{D}^{\,k} \phi^a = -\lambda \left(v^2 - \phi^2\right) \phi^a. \tag{4.5}$$

Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{ЯМХ}}$ обладает явной калибровочной инвариантностью относительно группы $SU(2)$ преобразований в изотопическом пространстве. Потенциальная энергия $V(\phi)$ в зависимости от знака v^2 имеет минимум либо при $\phi^2 = 0$, если $v^2 < 0$, либо при $\phi^2 = v^2$, если $v^2 > 0$. Классический вакуум определяется как асимптотическое решение при $r \to \infty$, обеспечивающее минимум энергии полей $\mathcal{E}$.

При $v^2 < 0$ вакуум оказывается симметричным $\phi^a\big|_{r\to\infty} = 0$, обладая симметрией лагранжиана. При $v^2 > 0$ вакуум теряет симметрию лагранжиана:

$$\phi^a\Big|_{r\to\infty} = v\Phi^a\,, \tag{4.6}$$

где Φ^a — некоторый произвольно выбранный единичный вектор в изопространстве, $\Phi^a\Phi^a = 1$. Множество вакуумов, определяемое этим условием образует пространство, представляющее собой двумерную сферу. Выбор конкретного вакуума (4.6) сводится к выбору определенного направления Φ^a в изопространстве, что нарушает симметрию $SU(2)$. Это явление носит название спонтанного нарушения симметрии. Построенное на вакууме (4.6) решение уравнений поля обладает остаточной $U(1)$-симметрией, не меняющей направления Φ^a.

Как уже было сказано выше, решение уравнений (4.4), (4.5) даже при наличии сферической симметрии может быть найдено только численно. Тем не менее, существует предельный случай $\lambda \to 0$ (предел БПС), для которого решение получается в явном виде. Рассмотрим этот случай подробнее.

В пределе БПС лагранжиан модели и уравнения поля имеют вид

$$\mathcal{L}_{\text{ЯМХ}} = \frac{1}{4}F^a_{km}F^{a\,km} + \frac{1}{2}\hat{D}_k\phi^a\,\hat{D}^k\phi^a\,, \tag{4.7}$$

$$\begin{array}{l} \hat{D}_k F^{a\,km} = g\,\varepsilon_{abc}\phi^b \hat{D}^m \phi^c \\ \hat{D}_k \hat{D}^k \phi^a = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \hat{D}_k \mathbf{F}^{km} = g^2 \left[\boldsymbol{\phi}, \hat{D}^m \boldsymbol{\phi}\right] \\ \hat{D}_k \hat{D}^k \boldsymbol{\phi} = 0 \end{array} \tag{4.8}$$

Предположим теперь, что искомые нами решения, во-первых, являются статическими, то есть потенциалы калибровочного поля $\mathbf{A}_m$ и скалярное поле $\boldsymbol{\phi}$ не зависят от x^4. Во-вторых, будем считать, что обсуждаемые решения относятся к так называемому «магнитному» типу, поэтому

$$\mathbf{A}_4 \equiv 0\,. \tag{4.9}$$

Учитывая эти допущения, получаем, что все выражения, в которых хотя бы один индекс равен 4, обращаются в нуль:

$$\hat{D}_4 \boldsymbol{\phi} = 0\,, \quad \mathbf{F}_{m4} = 0\,, \quad \hat{D}_4 \mathbf{F}_{km} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Отсюда вытекает, что уравнения (4.8) можно редуцировать к виду

$$\begin{array}{c} \hat{D}_c \mathbf{F}^{cd} = g^2 \left[\boldsymbol{\phi}, \hat{D}^d \boldsymbol{\phi}\right]\,, \\ \hat{D}_c \hat{D}^c \boldsymbol{\phi} = 0\,, \end{array} \tag{4.10}$$

где индексы c и d могут принимают значения от 1 до 3.

в. *Переход к чисто калибровочной модели*

Уравнения (4.10) можно исследовать и непосредственно в том виде, как они написаны. Однако существует важное, с математической точки зрения, соответствие между данной моделью и чисто калибровочной теорией в евклидовом 4-мерном пространстве. Рассмотрим новое статическое калибровочное поле с потенциалом $\tilde{\mathbf{A}}_m$, которое связано с исходными конструкциями следующими соотношениями

$$\tilde{\mathbf{A}}_m = \begin{cases} g\,\boldsymbol{\phi}, & m = 4\,, \\ \mathbf{A}_c, & m = c = 1, 2, 3\,. \end{cases} \tag{4.11}$$

Компоненты тензора напряжённости нового поля $\tilde{\mathbf{F}}_{km}$ имеют вид

$$\tilde{\mathbf{F}}_{c4} = g\hat{D}_c\boldsymbol{\phi}\,, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{cd} = \mathbf{F}_{cd}\,. \tag{4.12}$$

Преобразуем теперь уравнения (4.10), используя полученные соотношения:

$$\begin{aligned}\hat{D}_c\tilde{\mathbf{F}}^{cd} = \left[\tilde{\mathbf{A}}_4, \tilde{\mathbf{F}}^d{}_4\right] = -\hat{D}_4\tilde{\mathbf{F}}_4{}^d\,,\\ \hat{D}_c\tilde{\mathbf{F}}^c{}_4 = 0\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Второе уравнение в этом случае выглядит как одно из уравнений Янга-Миллса в чисто калибровочной модели без скалярного поля. Для того, чтобы первое уравнение также превратилось в уравнение Янга-Миллса, очевидно, необходимо считать, что $g_{44} = +1$, то есть использовать метрику 4-мерного евклидового пространства.

Таким образом, в результате наших преобразований от системы (4.10) мы приходим к одному соотношению

$$\hat{D}_k\tilde{\mathbf{F}}_{km} = 0\,, \tag{4.14}$$

где, благодаря положительной определённости евклидовой метрики, мы можем не различать верхние и нижние индексы.

г. *Функционал энергии системы полей*

Для дальнейших исследований нам будет необходим функционал энергии рассматриваемой системы. Для его вывода мы применим способ, аналогичный использованному в лекции 2. Свернём первое и второе уравнения в (4.8) с F^a_{im} и $\hat{D}^k\phi^a$ соответственно и получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}0 &= \hat{D}_k F^{km\,a}F^a_{im} - g\varepsilon_{abc}F^a_{im}\phi^b\hat{D}^m\phi^c = \\ &= \partial_k\left[F^a_{im}F^{km\,a} - \frac{1}{4}\delta^k_i F^a_{mp}F^{mp\,a}\right] - g\varepsilon_{abc}F^a_{im}\phi^b\hat{D}^m\phi^c\,,\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \hat{D}_k \hat{D}^k \phi^a = \partial_k \left(\hat{D}^k \phi^a \hat{D}_i \phi^a \right) - \hat{D}^k \phi^a \hat{D}_k \hat{D}_i \phi^a = \\
&= \partial_k \left(\hat{D}^k \phi^a \hat{D}_i \phi^a \right) - \hat{D}^k \phi^a \hat{D}_i \hat{D}_k \phi^a + \hat{D}^k \phi^a [\hat{D}_i, \hat{D}_k] \phi^a = \\
&= \partial_k \left(\hat{D}^k \phi^a \hat{D}_i \phi^a \right) - \frac{1}{2} \partial_i \left(\hat{D}^k \phi^a \hat{D}_k \phi^a \right) + g \varepsilon_{abc} \hat{D}^k \phi^a F^b_{ik} \phi^c = \\
&= \partial_k \left[\hat{D}_i \phi^a \hat{D}^k \phi^a - \frac{1}{2} \delta^k_i \hat{D}^m \phi^a \hat{D}_m \phi^a \right] + g \varepsilon_{abc} F^a_{ik} \phi^b \hat{D}^k \phi^c .
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Далее, складывая их, мы приходим к выражению

$$
0 = \partial_k \mathbb{T}^k_i ,
$$

где

$$
\mathbb{T}_{ik} = F^a_{im} F_k{}^{m\,a} - \frac{1}{4} \mathrm{g}_{ik} F^a_{mp} F^{a\,mp} + \hat{D}_i \phi^a \hat{D}_k \phi^a - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{ik} \hat{D}^m \phi^a \hat{D}_m \phi^a
\tag{4.17}
$$

— тензор энергии импульса системы, составленной из скалярного поля Хиггса и калибровочного поля в пределе БПС.

Найдём теперь выражение для плотности энергии $\mathbb{T}_{44}$ рассматриваемой системы в статическом, чисто магнитном случае:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}_{44} &= F^a_{4m} F_4{}^{m\,a} - \frac{1}{4} \mathrm{g}_{44} F^a_{mp} F^{a\,mp} + \hat{D}_4 \phi^a \hat{D}_4 \phi^a - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{44} \hat{D}^m \phi^a \hat{D}_m \phi^a = \frac{1}{4} F^a_{bc} F^{a\,bc} + \frac{1}{2} \hat{D}^c \phi^a \hat{D}_c \phi^a
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

и перепишем его, используя формулы (4.11), (4.12) и переходя к евклидовой метрике

$$
\mathbb{T}_{44} = \frac{1}{4} \tilde{F}^a_{bc} \tilde{F}^{a\,bc} + \frac{1}{2} \mathrm{g}^{cd} \tilde{F}^a_{c4} \tilde{F}^a_{d4} = \frac{1}{4} \tilde{F}^a_{km} \tilde{F}^{a\,km} = \frac{1}{4} \tilde{F}^a_{km} \tilde{F}^a_{km} .
\tag{4.19}
$$

В результате мы получим, что выражение для функционала энергии системы для статического, чисто магнитного случая имеет вид

$$\mathcal{E} \equiv \int d^3x\, \mathbb{T}_{44} = \frac{1}{4} \int d^3x\, \tilde{F}^a_{km} \tilde{F}^a_{km} \,. \tag{4.20}$$

Из-за очевидного удобства данного подхода везде в последующих параграфах мы будем использовать только формулы (4.14) и (4.19) вместо (4.10) и (4.18), а также для простоты опускать в них знак тильды над компонентами введённого нами вспомогательного поля.

д. *Определение самодуального монополя*

Исследование свойств статических решений уравнений Янга–Миллса, реализующих абсолютные минимумы энергии (4.19), мы будем осуществлять по той же схеме, что и в случае инстантонов.

Как и для функционала действия $\mathcal{S}$, для энергии справедливо неравенство

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int d^3x\, F^a_{km} F^a_{km} \geqslant \frac{1}{4} \left| \int d^3x\, F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km} \right| . \tag{4.21}$$

Знак равенства в (4.21), очевидно, достигается только тогда, когда

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{km} = \pm\, \mathbf{F}_{km} \,, \tag{4.22}$$

Последнее равенство является в точности условием (анти)самодуальности для статических калибровочных полей, поэтому решение этих уравнений мы будем называть самодуальным монополем, или монополем Богомольного–Прасада–Соммерфильда (БПС-монополем).

Вычислим теперь значение интеграла, стоящего в правой части неравенства (4.21). Так как подынтегральное выражение представляет собой 3-дивергенцию от некоторого вектора

$$\frac{1}{4} F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km} = F^a_{c4} \overset{*}{F}{}^a_{c4} = \partial_c \left(A^a_4 \overset{*}{F}{}^a_{c4} \right) , \tag{4.23}$$

то с помощью теоремы Гаусса мы получаем, что

$$\frac{1}{4} \int d^3x \, F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km} = \int\limits_{S^2_\infty} d^2\sigma_c \, A^a_4 \overset{*}{F}{}^a_{c4} , \tag{4.24}$$

где интегрирование производится по двумерной сфере бесконечного радиуса.

При этом мы предполагаем, что на бесконечности компоненты тензора напряжённости калибровочного поля обращаются в нуль. Из этого условия можно получить два важных для нас следствия. Во-первых, сворачивая равенство

$$F^a_{d4} = \partial_d A^a_4 + g \varepsilon_{abc} A^b_d A^c_4 \Big|_{r\to\infty} = 0$$

с A^a_4, находим, что

$$\partial_d \left(A^a_4 A^a_4 \right) \Big|_{r\to\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^a_4 \Big|_{r\to\infty} = \frac{v}{g} \, \Phi^a , \tag{4.25}$$

где величина Φ^a подчиняется нормировочному соотношению $\Phi^a \Phi^a = 1$, а v — некоторая неотрицательная константа (сравните с формулой (4.6)). Во-вторых, выражая из него остальные компоненты потенциала, получаем, что на бесконечности они должны удовлетворять формуле

$$A^a_d = -\frac{1}{g} \, \varepsilon_{abc} \Phi^b \, \partial_d \Phi^c + \Phi^a \left(A^b_d \Phi^b \right) . \tag{4.26}$$

Отсюда найдём асимптотическое выражение для $A_4^a \overset{*}{F}{}_{c4}^a$:

$$F_{bc}^a = \frac{1}{g}\,\Phi^a \varepsilon_{def} \Phi^d \partial_b \Phi^e \partial_c \Phi^f - \frac{2}{g}\,\varepsilon_{ade} \partial_b \Phi^d \partial_c \Phi^e +$$
$$+ \Phi^a \left[\partial_b \left(A_c^d \Phi^d\right) - \partial_c \left(A_b^d \Phi^d\right)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\overset{*}{F}{}_{c4}^a A_4^a = -\frac{v}{2g^2}\,\varepsilon_{cef} \varepsilon_{abd} \Phi^a \partial_e \Phi^b \partial_f \Phi^d + \frac{v}{g}\,\varepsilon_{cef}\,\partial_e \left(A_f^a \Phi^a\right). \tag{4.27}$$

Сфера S_∞^2 может быть параметризована двумя параметрами ξ_α (α=1, 2), при этом элемент площади $d^2\sigma_c$ запишется в виде

$$d^2\sigma_c = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{cef}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x_e}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial x_f}{\partial \xi_\beta}\, d^2\xi\,. \tag{4.28}$$

Собирая вместе формулы (4.27), (4.28) и учитывая, что

$$\int\limits_{S_\infty^2} d^2\sigma_c \varepsilon_{cef}\,\partial_e \left(A_f^a \Phi^a\right) = \int d^3x\,\varepsilon_{cef}\,\partial_c \partial_e \left(A_f^a \Phi^a\right) \equiv 0\,,$$

получаем следующее выражение для исследуемого интеграла

$$\int\limits_{S_\infty^2} d^2\sigma_c\,\overset{*}{F}{}_{c4}^a A_4^a = -\frac{v}{2g^2} \int\limits_{S_\infty^2} d^2\xi\,\varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{\alpha\beta} \Phi^a \frac{\partial \Phi^b}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi^c}{\partial \xi_\beta} =$$

$$= \pm\frac{v}{g^2} \int\limits_{S_\infty^2} d^2\xi \sqrt{\det\left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi_\beta}\right)}\,,$$

где для нахождения последнего выражения мы воспользовались тождеством

$$\left[\varepsilon_{abc}\,\varepsilon_{\alpha\beta} \Phi^a \frac{\partial \Phi^b}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi^c}{\partial \xi_\beta}\right]^2 = 4 \det\left(\frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi_\beta}\right).$$

Так как полученный определитель представляется собой определитель метрического тензора на единичной сфере $\Phi^a\Phi^a = 1$, исследуемый интеграл равен

$$\frac{1}{4}\int d^3x\, F^a_{km}\overset{*}{F}{}^a_{km} = \int\limits_{S^2_\infty} d^2\sigma_c\, A^a_4\overset{*}{F}{}^a_{c4} = \pm\frac{4\pi v}{g^2}\, n\,, \tag{4.29}$$

где n — целое неотрицательное число, поскольку, если точка (ξ_1, ξ_2) пробегает по сфере один раз, вектор Φ^a пробегает единичную сферу $\Phi^a\Phi^a = 1$ n раз, давая каждый раз вклад в виде 3-мерного телесного угла 4π.

Лекция 5

а. *Классификация монопольных решений*

Таким образом, мы устанавливаем следующее неравенство для функционала энергии $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \geqslant \frac{4\pi v}{g^2} \cdot n, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{5.1}$$

Равенство достигается только для статических (анти)самодуальных полей.

Различные монопольные решения удобно различать между собой, используя понятие магнитного заряда

$$q_m = \frac{g}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \left(A_4^a A_4^a\right)^{-1/2} \cdot \int d^3x\, F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km}\,, \tag{5.2}$$

который принимает значения из множества целых чисел. Для нетривиальных самодуальных калибровочных полей магнитный заряд является положительным ($q_m = +n$), и в этом случае говорят о собственно монополях. Для антисамодуальных полей он является отрицательным ($q_m = -n$). Тогда соответствующие решения называют антимонополями. В тривиальном случае, когда $F^a_{km} \equiv 0$, заряд, разумеется, равен нулю.

Точно также, как и в случае инстантонов, приведённые ранее рассуждения вовсе не гарантируют существование самих монопольных решений. Эта задача может быть решена только путём явного их построения. В дальнейшем, используя свойства симметрии калибровочных полей, мы получим явные монопольное и антимонопольное решения с зарядом, по модулю равным единице.

б. Статическая $SO(3)$-симметрия

Мы будем искать решение, симметричное относительно вращений в 3-мерном евклидовом пространстве, то есть преобразований из группы $SO(3)$. Операторы, образующие базис соответствующей алгебры Ли, имеют вид

$$\underset{1}{\hat{\xi}} = x_3\partial_2 - x_2\partial_3\,, \quad \underset{2}{\hat{\xi}} = x_1\partial_3 - x_3\partial_1\,, \quad \underset{3}{\hat{\xi}} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2\,,$$

или, в короткой записи,

$$\underset{a}{\hat{\xi}} = \underset{a}{\xi}^m\partial_m = -\varepsilon_{abc}x_b\partial_c, \qquad a,\ b,\ c = 1, 2, 3. \tag{5.3}$$

Кроме того, мы ограничиваем себя поиском только статических решений, следовательно к указанным выше трём операторам необходимо присоединить четвёртый оператор

$$\underset{4}{\hat{\xi}} = \partial_4\,,$$

коммутирующий с остальными.

Коммутационные соотношения для них выглядят следующим образом

$$\left[\underset{a}{\hat{\xi}}, \underset{b}{\hat{\xi}}\right] = \varepsilon_{abc}\underset{c}{\hat{\xi}}\,, \quad \left[\underset{a}{\hat{\xi}}, \underset{4}{\hat{\xi}}\right] = 0\,. \tag{5.4}$$

Для нахождения матриц $\mathbf{W}_m \in \mathfrak{su}(2)$, соответствующих операторам $\underset{m}{\hat{\xi}} \in \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{gl}(1)$, необходимо решить уравнение (1.23). Так же как и в лекции 3, мы будем считать, что величины $\mathbf{W}_m$ не зависят от координат $(x_1, \ldots, x_4)$ и, таким образом, отображение $W : \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{gl}(1) \to \mathfrak{su}(2)$ является гомоморфизмом.

Воспользуемся этим и подберём элементы алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ так, чтобы они удовлетворяли коммутационным соотношениям вида (5.4). Это несложно сделать, если взять

$$\mathbf{W}_a = W\hat{\underset{a}{\xi}} = \mathbf{t}_a\,, \quad \mathbf{W}_4 = 0\,. \tag{5.5}$$

в. Решение БПС

Используя полученный результат, найдём выражение для потенциалов калибровочного поля $\mathbf{A}_k$. Для этого запишем условия симметрии

$$\pounds_{\underset{a}{\xi}}\mathbf{A}_4 = -\varepsilon_{abc}x_b\,\partial_c\mathbf{A}_4 = [\mathbf{A}_4, \mathbf{t}_a]\;, \tag{5.6}$$

$$\pounds_{\underset{a}{\xi}}\mathbf{A}_d = -\varepsilon_{abc}x_b\,\partial_c\mathbf{A}_d - \varepsilon_{adc}\mathbf{A}_c = [\mathbf{A}_d, \mathbf{t}_a]\;, \tag{5.7}$$

$$\pounds_{\underset{4}{\xi}}\mathbf{A}_k = \partial_4\mathbf{A}_k = 0\,, \tag{5.8}$$

причём последнее равенство означает, очевидно, что все компоненты потенциала не зависят от x_4. Если свернуть обе части (5.6) с x_a/r, получаем

$$[\mathbf{A}_4, \mathbf{t}_r] = 0\,, \qquad \mathbf{t}_r \equiv \frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_a\,,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{A}_4 = h\,\mathbf{t}_r\,.$$

Подставляя найденное выражение обратно в (5.6), найдём условие на множитель h:

$$-\varepsilon_{abc}x_b\,\partial_c h\,\mathbf{t}_r - h\,\varepsilon_{abd}\frac{x_b}{r}\mathbf{t}_d = h\,\frac{x_b}{r}\,[\mathbf{t}_b, \mathbf{t}_a] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{abc}x_b\,\partial_c h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = h(r)\,.$$

В результате мы приходим к тому, что в статическом сферически симметричном случае

$$\mathbf{A}_4 = h(r)\,\mathbf{t}_r = h(r)\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_a\,. \tag{5.9}$$

Определим теперь выражение для остальных компонент потенциала. Вначале свернём (5.7) с $x_a x_d/r^2$:

$$\left[\mathbf{A}_d\,\frac{x_d}{r},\mathbf{t}_r\right]=0\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}_d\,\frac{x_d}{r}=G_1\,\mathbf{t}_r\,.$$

Полученное равенство позволяет нам записать $\mathbf{A}_a$ в виде суммы трёх слагаемых

$$\mathbf{A}_a=G_1\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r+\frac{G_2}{r}\,\mathbf{p}_a+\frac{1-G_3}{r}\,\mathbf{s}_a\,,$$

где G_2 и G_3 произвольные пока функции координат, а ортогональные к x_a/r элементы из алгебры Ли $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{s}_a$ определяются соотношениями

$$\mathbf{p}_a=\mathbf{t}_a-\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r\,,\qquad\mathbf{s}_a=\varepsilon_{abc}\,\frac{x_b}{r}\,\mathbf{t}_{(c)}\,.\tag{5.10}$$

Кроме того, нетрудно показать прямыми вычислениями справедливость следующих тождеств:

$$[\mathbf{t}_r,\mathbf{s}_a]=\mathbf{p}_a\,,\quad[\mathbf{p}_a,\mathbf{t}_r]=\mathbf{s}_a\,,\quad[\mathbf{s}_a,\mathbf{p}_b]=\left(\delta_{ab}-\frac{x_a x_b}{r^2}\right)\mathbf{t}_r\,,$$

$$[\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b]=\varepsilon_{abc}\mathbf{t}_c+\frac{x_a}{r}\,\mathbf{s}_b-\frac{x_b}{r}\,\mathbf{s}_a\,,\quad[\mathbf{s}_a,\mathbf{s}_b]=\varepsilon_{abc}\frac{x_c}{r}\,\mathbf{t}_r\,,$$

$$\partial_a\mathbf{t}_r=\frac{1}{r}\,\mathbf{p}_a\,,\quad\partial_a\mathbf{p}_b=-\frac{1}{r}\left(\delta_{ab}-\frac{x_a x_b}{r^2}\right)\mathbf{t}_r-\frac{x_b}{r^2}\,\mathbf{p}_a\,,$$

$$\partial_a\mathbf{s}_b=-\frac{1}{r}\,\varepsilon_{abc}\mathbf{t}_c-\frac{x_a}{r^2}\,\mathbf{s}_b\,,$$

$$\varepsilon_{abc}\mathbf{s}_c=\frac{x_a}{r}\,\mathbf{p}_b-\frac{x_b}{r}\,\mathbf{p}_a\,.\tag{5.11}$$

Подставляя найденное нами выражение для $\mathbf{A}_a$ в (5.7) и используя тождества (5.11), получаем

$$\underset{a}{\pounds_\xi}G_1\,\frac{x_d}{r}\,\mathbf{t}_r+\underset{a}{\pounds_\xi}G_2\,\frac{1}{r}\,\mathbf{p}_d-\underset{a}{\pounds_\xi}G_3\,\frac{1}{r}\,\mathbf{s}_d=0\,.$$

Свёртка этого равенства с x_d даёт

$$\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}} G_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad G_1 = G_1(r)\,.$$

Более того, так как величины $\mathbf{p}_d$ и $\mathbf{s}_d$ являются независимыми,

$$\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}} G_2 = \mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}} G_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad G_2 = G_2(r)\,, \quad G_3 = G_3(r)\,.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для компонент $\mathbf{A}_a$ в статическом сферически симметричном случае:

$$\mathbf{A}_a = G_1(r)\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + \frac{G_2(r)}{r}\,\mathbf{p}_a + \frac{1-G_3(r)}{r}\,\mathbf{s}_a = G_1(r)\,\frac{x_a x_b}{r^2}\,\mathbf{t}_{(b)} + \\ + \frac{G_2(r)}{r}\,\left(\mathbf{t}_{(a)} - \frac{x_a x_b}{r^2}\,\mathbf{t}_{(b)}\right) + (1-G_3(r))\,\varepsilon_{abc}\,\frac{x_b}{r^2}\,\mathbf{t}_{(c)}\,. \tag{5.12}$$

Покажем теперь, что из трёх имеющихся произвольных функций существенными являются только две. Для этого подвергнем найденные выражения для потенциалов калибровочному преобразованию вида

$$\mathbf{U} = \exp(\theta(r)\,\mathbf{t}_r) = \cos\frac{\theta}{2} + 2\,\mathbf{t}_r \sin\frac{\theta}{2}\,. \tag{5.13}$$

Важно отметить, что под действием данного преобразования матрицы $\mathbf{W}_m$ не изменяются

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{t}_a\mathbf{U} = \frac{x_a}{r}\mathbf{t}_r + \cos\theta\,\mathbf{p}_a + \sin\theta\,\mathbf{s}_a\,,$$

$$\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}}\mathbf{U} = -2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{s}_a, \quad \mathbf{U}^{-1}\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}}\mathbf{U} = (1-\cos\theta)\mathbf{p}_a + \sin\theta\,\mathbf{s}_a$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{W}'_a = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{t}_a\mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1}\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{a}{\xi}}\mathbf{U} = \mathbf{t}_a\,, \quad \mathbf{W}'_4 = \mathbf{U}^{-1}\mathop{\mathcal{L}}_{\underset{4}{\xi}}\mathbf{U} = 0\,.$$

Используя соотношения

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{t}_r\mathbf{U} = \mathbf{t}_r\,, \quad \mathbf{U}^{-1}\mathbf{p}_a\mathbf{U} = \cos\theta\,\mathbf{p}_a + \sin\theta\,\mathbf{s}_a\,,$$

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{s}_a\mathbf{U} = -\sin\theta\,\mathbf{p}_a + \cos\theta\,\mathbf{s}_a\,,$$

$$\mathbf{U}^{-1}\partial_a\mathbf{U} = \frac{d\theta}{dr}\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + \frac{\sin\theta}{r}\,\mathbf{p}_a + \frac{(1-\cos\theta)}{r}\,\mathbf{s}_a\,,$$

найдём компоненты преобразованного потенциала

$$\mathbf{A}'_a = \left(G_1 + \frac{d\theta}{dr}\right)\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + (\cos\theta\,G_2 + \sin\theta\,G_3)\,\frac{\mathbf{p}_a}{r} + \\ + (\sin\theta\,G_2 - \cos\theta\,G_3 + 1)\,\frac{\mathbf{s}_a}{r}\,, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{A}'_4 = h\,\mathbf{t}_r\,. \tag{5.15}$$

Из полученных формул мы получаем, что под действием калибровочного преобразования (5.13) функции h, G_1, G_2, G_3 изменяются следующим образом:

$$h' = h\,, \quad G'_1 = G_1 + \frac{d\theta}{dr}\,, \\ G'_2 = \cos\theta\,G_2 + \sin\theta\,G_3\,, \quad G'_3 = -\sin\theta\,G_2 + \cos\theta\,G_3\,. \tag{5.16}$$

При этом очевидно, что, выбирая $\theta(r)$, можно добиться обнуления любой из трёх функций G_a, $a = 1, 2, 3$. Для определённости будем считать, что $G_2 = 0$. Таким образом, мы получаем окончательное выражение для калибровочного потенциала

$$\mathbf{A}_4 = h(r)\,\mathbf{t}_r\,, \quad \mathbf{A}_a = G_1(r)\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + \frac{1 - G_3(r)}{r}\,\mathbf{s}_a\,. \tag{5.17}$$

Найдём теперь статическое сферически симметричное решение уравнений самодуальности. Для этого, пользуясь тождествами (5.11), вычислим компоненты тензора напряжённости $\mathbf{F}_{km}$ и дуального тензора $\overset{*}{\mathbf{F}}_{km}$:

$$\mathbf{F}_{a4} = \frac{dh}{dr}\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + \frac{h\,G_3}{r}\,\mathbf{p}_a\,, \tag{5.18}$$

$$\mathbf{F}_{ab} = -\frac{G_1 G_3}{r^2}\,\varepsilon_{abc}\mathbf{s}_c + \frac{1}{r}\frac{dG_3}{dr}\,\varepsilon_{abc}\mathbf{p}_c + \frac{G_3^2 - 1}{r^2}\,\varepsilon_{abc}\frac{x_c}{r}\mathbf{t}_r\,, \tag{5.19}$$

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{a4} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}\mathbf{F}_{bc} = \frac{G_3^2 - 1}{r^2}\,\frac{x_a}{r}\,\mathbf{t}_r + \frac{1}{r}\frac{dG_3}{dr}\,\mathbf{p}_a - \frac{G_1 G_3}{r^2}\,\mathbf{s}_a\,, \tag{5.20}$$

$$\overset{*}{\mathbf{F}}_{ab} = \varepsilon_{abc}\mathbf{F}_{c4} = \frac{h\,G_3}{r}\,\varepsilon_{abc}\mathbf{p}_c + \frac{dh}{dr}\,\varepsilon_{abc}\frac{x_c}{r}\mathbf{t}_r\,. \tag{5.21}$$

Уравнение $\overset{*}{\mathbf{F}}_{km} = \pm\mathbf{F}_{km}$ приводит нас к следующей системе:

$$\frac{dh}{dr} = \pm\frac{G_3^2 - 1}{r^2}\,, \qquad \frac{dG_3}{dr} = \pm h G_3\,, \qquad G_1\,G_3 = 0\,. \tag{5.22}$$

Кроме того, нужно учитывать, что мы ищем решение без сингулярностей, следовательно в начале координат должно выполняться условие $G_3^2(0) = 1$. Поскольку функция G_3 не может тождественно равняться нулю, из последнего равенства в (5.22) мы получаем, что

$$G_1(r) = 0\,.$$

Решим теперь оставшиеся уравнения. Для этого выразим функцию h из второго уравнения и подставим в первое:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{G_3}\frac{dG_3}{dr}\right) = \frac{G_3^2 - 1}{r^2}\,. \tag{5.23}$$

Решением этого уравнения являются следующие функции

$$G_3 = \pm\frac{vr}{\operatorname{sh}(v(r + r_0))}\,, \qquad G_3 = \pm\frac{vr}{\sin(v(r + r_0))}\,, \qquad G_3 = \pm\frac{r}{r + r_0}\,.$$

Для начала заметим, что из формул (5.16) следует, что знак, стоящий впереди, не является существенным, так как его всегда можно изменить с помощью калибровочного преобразования (5.13), полагая $\theta = \pi$. Кроме того, если потребовать ограниченность искомой функции и справедливость условия $G_3^2(0) = 1$, то мы должны полностью отбросить второй вариант, а в остальных считать, что $r_0 = 0$, то есть

$$G_3 = \frac{vr}{\operatorname{sh} vr} \quad \text{или} \quad G_3 = 1\,.$$

В случае, когда $G_3 = 1$, из (5.22) следует, что $dh/dr = 0$. Это означает, что все компоненты тензора $\mathbf{F}_{km}$ равны нулю, и мы имеем дело с чистой калибровкой. Такое тривиальное решение нас интересовать не будет.

Таким образом, вычисляя выражение для $h(r)$, приходим к следующему решению уравнений самодуальности

$$G_3(r) = \frac{vr}{\operatorname{sh} vr}\,, \qquad h(r) = \pm\left(\frac{1}{r} - v\operatorname{cth} vr\right)\,, \tag{5.24}$$

где знак плюс соответствует собственно монопольному решению, а минус — антимонопольному. Константу v из соображений удобства будем считать положительной.

Магнитный заряд для данной конфигурации может быть вычислен напрямую, применяя формулу (5.2). На бесконечности, как и положено (см. (4.25)),

$$A_4^a = \frac{1}{g}\,h(\infty)\frac{x_a}{r} = \mp\frac{v\,x_a}{g\,r} \quad \Rightarrow \quad A_4^a A_4^a = \frac{v^2}{g^2}\,.$$

Далее, используя формулы (5.18)-(5.21), получаем

$$q_m = \frac{g^2}{16\pi v} \int d^3x\, F^a_{km} \overset{*}{F}{}^a_{km} = \frac{1}{v} \int\limits_0^{+\infty} dr \left[\frac{dh}{dr} \left(G_3^2 - 1\right) + 2h\, G_3 \frac{dG_3}{dr} \right] =$$

$$= \frac{1}{v} \int\limits_0^{+\infty} d\left[h(G_3^2 - 1)\right] = \frac{1}{v}\left[h(G_3^2 - 1)\right]\Big|_0^{+\infty} = \pm 1\,. \tag{5.25}$$

Следовательно, мы имеем явные реализации монопольного и антимонопольного решений уравнений Янга-Миллса

$$\mathbf{A}_4 = \pm \left(\frac{1}{r} - v \operatorname{cth} vr \right) \frac{x_a}{r}\, \mathbf{t}_a\,, \tag{5.26}$$

$$\mathbf{A}_a = \left(1 - \frac{vr}{\operatorname{sh} vr} \right) \varepsilon_{abc} \frac{x_b}{r^2}\, \mathbf{t}_c\,. \tag{5.27}$$

с магнитным зарядом, по модулю равным единице.

Данное решение, очевидно, можно обобщить, если в качестве центра симметрии взять не начало координат, а произвольную точку с координатами (c_1, c_2, c_3). В этом случае мы получаем полное монопольное решение БПС, зависящее от трёх параметров — координат центра монополя, не исчезающих при калибровочных преобразованиях, и положительной константы v, связанной с параметрами конкретной модели в эквивалентной теории Янга-Миллса-Хиггса (см. (4.6)).

Литература

а. *Учебники и монографии*

1. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля.* — М.: Эдиториал УРСС. — 1999. — 336 стр.

2. М. Пескин, Д. Шрёдер, *Введение в квантовую теорию поля.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2001. — 784 стр. — Глава 15.

3. Л. Б. Окунь, *Физика элементарных частиц.* — М.: Наука. — 1988. — 288 стр.

4. В. Г. Багров, А. С. Вшивцев, С. В. Кетов, *Дополнительные главы математической физики (калибровочные поля).* — Томск: Изд-во Томск. ун-та. — 1990. — 142 стр.

5. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Поля и фундаментальные взаимодействия.* — Киев: Наукова думка. — 1986. — 552 стр.

6. Н. П. Коноплёва, В. Н. Попов, *Калибровочные поля.* — М.: Эдиториал УРСС. — 2000. — 272 стр.

7. А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов, *Калибровочные поля.* — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1986. — 260 стр. — Главы I и II.

б. Статьи и обзоры

1. A. Actor, *Classical solutions of SU(2) Yang–Mills theories* / Review of Modern Physics. — 1979. — Vol. 51. — P. 461 – 525.

2. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations* / Physics Letters B. — 1975. — Vol. 59. — P. 85 – 87.

3. P. G. Bergmann, E. J. Flaherty, *Symmetries in gauge theories* / Journal of Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 19. — P. 212 – 214.

4. P. Forgács, N. S. Manton, *Space-time symmetries in gauge theories* / Communications in Mathematical Physics. — 1980. — Vol. 72. — P. 15 – 35.

5. М. К. Прасад, *Инстантоны и монополи в теориях калибровочных полей Янга–Миллса* / в кн.: *Геометрические идеи в физике*. Сб. статей под ред. Ю. И. Манина, — М.: Мир, 1983. — стр. 64 – 96.

6. C. N. Yang, R. L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance* / Physical Review. — 1954. — Vol. 96. — P. 191 – 195.

   Рус. перевод в кн.: *Элементарные частицы и компенсирующие поля*. Сб. статей под ред. Д. Д. Иваненко. — М.: Мир, 1964. — стр. 28 – 38.

7. R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction* / Physical Review. — 1956. — Vol. 101. — P. 1597 – 1607.

   Рус. перевод: Там же. — стр. 250 – 273.

8. Е. Б. Богомольный, *Устойчивость классических решений* / Ядерная физика. — 1976. — Т. 24. — стр. 861 – 870.

9. M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, *Exact classical solution for the t'Hooft monopole and the Julia–Zee dyon* / Physical Review Letters. — 1975. — Vol. 35. — P. 760 – 762.

10. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, *Инстантонная азбука* / Успехи физических наук. — 1982. — Т. 136. — стр. 553 – 591.

Заяц Алексей Евгеньевич

КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ СИММЕТРИИ

Конспект лекций

Форм. $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$. Гарнитура JournalPSCyr.
Усл. печ. л. 3,2.