ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ
КАЛИБРОВОЧНЫХ
ПОЛЕЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

А. Е. ЗАЯЦ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Конспект лекций

Казань – 2013

УДК 530.1(075.8)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института физики
Протокол № 3 от 7 июня 2013 г.

заседания кафедры теории относительности и гравитации
Протокол № 5 от 17 мая 2013 г.

Рецензент: *доц. ИММ КФУ Попов А. А.*

А. Е. Заяц.
Введение в теорию классических калибровочных полей: Конспект лекций. — Казань, 2013. — 38 стр.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой первую часть конспекта лекций по курсу «Калибровочные поля», читаемому магистрантам Института физики, обучающимся по направлению «Теоретическая и математическая физика». В нём изложены основные понятия классической теории калибровочных полей, а также базовые сведения из курса теории групп и алгебр Ли.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов Института физики.

Содержание

Предисловие

Предлагаемое вниманию читателей учебно-методическое пособие представляет собой первую часть конспекта из девяти лекций, посвящённых различным вопросам курса «Калибровочные поля», изучаемого магистрантами Института физики Казанского федерального университета.

Традиционно теория калибровочных полей излагается в учебниках и обзорах, посвящённых квантовой теории поля. Однако многие понятия калибровочных теорий появляются уже на уровне классической теории поля. Соответственно, чтение данного пособия не требует знания квантовой теории. В то же время предполагается, что читатель знаком с основами математического анализа, линейной алгебры, тензорного анализа, вариационного исчисления и квантовой механики.

В первой лекции вводятся основные математические понятия из теории групп и алгебр Ли, используемые нами дальнейшем. Следующие три лекции содержат изложение основных идей и понятий теории калибровочных полей, а также построение калибровочно инвариантного лагранжиана поля Янга–Миллса и получение с помощью вариационной процедуры уравнений Янга–Миллса.

Исследованию наиболее известных нетривиальных решений этих уравнений — монопольного решения Богомольного–Прасада–Соммерфильда и инстантонного решения Белавина–Полякова–Шварца–Тюпкина посвящено методическое пособие «Классические калибровочные поля и их симметрии», представляющее собой вторую часть настоящего конспекта лекций.

Обозначения и основные формулы

Цель этого раздела — ввести условные обозначения и дать сводку необходимых в дальнейшем формул.

На протяжении всех лекций мы будем иметь дело с плоским 4-мерным пространством-временем Минковского с координатами x^1, x^2, x^3, x^4, при этом последняя координата считается временно́й. Метрика такого пространства в задаётся с помощью тензора g_{ik}:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2\,.$$

Используемый нами полностью антисимметричный постоянный тензор $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ в n-мерном пространстве (тензор Леви-Чивиты) определяется как

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ & \text{есть чётная перестановка } 1, 2, \ldots, n; \\ -1, & \text{если } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ & \text{есть нечётная перестановка } 1, 2, \ldots, n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как следствие этого определения, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{1234} = 1$.

Для тензора $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ справедливо следующее тождество:

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = (-1)^S \begin{vmatrix} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_1} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_1} \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_2} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_2} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_2} \\ & & \ddots & \\ \delta^{\beta_1}_{\alpha_n} & \delta^{\beta_2}_{\alpha_n} & \ldots & \delta^{\beta_n}_{\alpha_n} \end{vmatrix}\,,$$

где число S — количество знаков минус в сигнатуре метрики рассматриваемого пространства.

Также в данном пособии нами используются приведённые ниже обозначения:

1. Запись $f(x)$ означает, что функция f зависит от *всех* координат пространства, т. е. $f(x) \equiv f(x^1, x^2, x^3, x^4)$;

2. Для производной по координате x^m применяется символ ∂_m.

3. Напротив, штрих «$'$» всюду в тексте обозначает величину, полученную из исходной в результате некоторого калибровочного преобразования;

4. Для обозначения различных групп Ли применяются заглавные латинские буквы, в то время как для соответствующих им алгебр Ли — строчные готические: например, G и $\mathfrak{g}$, $SU(N)$ и $\mathfrak{su}(N)$ и т. д.;

5. Использование индексов в формулах настоящего пособия подчинено следующему правилу: латинские буквы из середины алфавита (i, k, m и т. д.) — для индексов, принимающих значения от 1 до 4, латинские буквы из начала алфавита (a, b, c и т. д.) — для индексов, пробегающих от 1 до 3. Кроме того, нами применяются строчные латинские буквы, записанные в скобках ((a), (b), (c) и т. д.), для обозначения групповых индексов и строчные греческие — для всех прочих случаев;

6. Различные матрицы, встречающиеся в тексте настоящего конспекта мы будем выделять, как правило, полужирным шрифтом. Для эрмитово сопряжённой и обратной матрицы к матрице $\mathbf{A}$ используются обозначения $\mathbf{A}^\dagger$ и $\mathbf{A}^{-1}$ соответственно. Символом $\mathbf{I}_N$ мы будем обозначать единичную матрицу размера $N \times N$, если же уточнения её размера не требуется, или он ясен из контекста, то индекс N опускается.

Лекция 1

a. Группы

Группой называется множество G, в котором определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:

1. ассоциативность — для всех a, b, $c \in G$ справедливо $(ab)c = a(bc)$;

2. существование единичного элемента $e \in G$, такого, что для любого $a \in G$ справедливо $ae = ea = a$;

3. существование обратного элемента $a^{-1} \in G$ для каждого $a \in G$, так что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Если операция умножения коммутативна, то есть $ab = ba$ для любых a, $b \in G$, то группу называют *абелевой*, в противном случае — *неабелевой*.

Подгруппой H группы G называется подмножество H множества G, которое само является группой по отношению к операции умножения, определённой в G. Иными словами, единица группы G принадлежит подмножеству H, и для любых элементов a, b из этого подмножества $ab \in H$, $a^{-1} \in H$.

Приведём несколько примеров:

1) Группа $U(1)$ — множество комплексных чисел z, по модулю равных единице ($z = \mathrm{e}^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Умножение в $U(1)$ — это умножение комплексных чисел, единица — это $z = 1$, а обратный элемент к z — это $z^{-1} = \mathrm{e}^{-i\alpha}$. Так как умножение комплексных чисел коммутативно, $U(1)$ — абелева группа.

2) Группа $GL(N,\mathbb{C})$ — множество комплексных матриц $\mathbf{M}$ размера $N \times N$ с отличным от нуля определителем. Умножение в $GL(N,\mathbb{C})$ — это умножение матриц, единица $\mathbf{I}_N$ — единичная матрица $N \times N$, обратный элемент к $\mathbf{M}$ — это обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}$. Очевидно, что группа $GL(1,\mathbb{C})$ — абелева, а группы $GL(N,\mathbb{C})$ с $N \geqslant 2$ — неабелевы.

Группы в следующих примерах — это подгруппы группы $GL(N,\mathbb{C})$. Иначе говоря, мы будем иметь дело с матрицами размера $N \times N$, а операция умножения будет умножением матриц.

3) Группа $GL(N,\mathbb{R})$ — это группа действительных матриц $\mathbf{M}$ размера $N \times N$ с отличным от нуля определителем.

4) Группа $U(N)$ — это группа унитарных матриц $\mathbf{A}$ размера $N \times N$, то есть таких, что

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}_N \tag{1.1}$$

(знаком $\dagger$ мы будем обозначать эрмитово сопряжение). Отметим, что отсюда следует

$$|\det \mathbf{A}|^2 = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^\dagger = 1 \quad \Rightarrow \quad |\det \mathbf{A}| = 1 \, .$$

5) Группа $SU(N)$ — группа унитарных матриц с единичным определителем (очевидно, что $SU(N)$ — подгруппа в $U(N)$). То, что групповые операции не выводят из множества $SU(N)$ следует из равенств

$$\det \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \det \mathbf{A}_1 \det \mathbf{A}_2 = 1 \, ,$$
$$\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} = 1 \, .$$

Группа $SU(1)$ состоит, очевидно, только из одного единичного элемента и, поэтому, нами рассматриваться не будет.

6) Группа $O(N)$ — группа действительных ортогональных матриц, то есть таких, что

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}_N \tag{1.2}$$

(знак $^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование). Ясно, что $O(N)$ — подгруппа одновременно и в $GL(N, \mathbb{R})$, и в $U(N)$. Отметим, что отсюда следует, что $\det \mathbf{A} = \pm 1$, поскольку

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2 = 1\,.$$

7) Группа $SO(N)$ — подгруппа группы $O(N)$, состоящая из матриц с определителем, равным единице.

Продолжим с полезными для дальнейшего определениями. *Гомоморфизмом групп* G и G' называют отображение $f : G \to G'$, согласованное с операциями умножения, то есть для любых a, $b \in G$

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad f(e) = e', \quad f(a^{-1}) = \{f(a)\}^{-1} \tag{1.3}$$

где умножение и взятие обратного элемента в левой и правой частях равенств понимаются в смысле групп G и G', а e и e' — единицы соответствующих групп.

Подгруппа N группы G называется *нормальной*, если для любых $a \in N$, $b \in G$ справедливо

$$b^{-1}ab \in N\,.$$

Очевидно, что приведённому определению удовлетворяют сама группа G и подгруппа, состоящая из одного единичного элемента. Такие нормальные подгруппы считаются тривиальными. Группа G, не содержащая иных нормальных подгрупп, кроме тривиальных, называется *простой*.

б. Алгебры Ли

Линейное пространство $\mathfrak{g}$ с заданной на нём билинейной операцией $[\ ,\ ]$ называется *алгеброй Ли*, если указанная операция удовлетворяет условиям

1. $[x,x]=0$ для любого $x\in\mathfrak{g}$; из этого условия следует, что операция $[\ ,\ ]$ является антикоммутативной:
$$[x+y,x+y]=0 \quad\Rightarrow\quad [x,y]=-[y,x]\,.$$
2. тождество Якоби: $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ для любых x, y, $z\in\mathfrak{g}$.

Величина $[x,y]$ называется *коммутатором* элементов x и y. Наиболее простым примером алгебры Ли является множество квадратных матриц размера $N\times N$ с коммутатором, для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определённым как
$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}\,. \tag{1.4}$$
Легко проверить, что данная операция удовлетворяет всем условиям, накладываемым на коммутатор в алгебре Ли.

Если коммутатор любых двух элементов x, y из алгебры Ли равен нулю $[x,y]=0$, то такую алгебру Ли называют *абелевой*, в противном случае — *неабелевой*.

Подалгеброй $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется линейное подпространство $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, которое само является алгеброй по отношению к коммутатору, определённому в $\mathfrak{g}$. Иными словами, $[x,y]\in\mathfrak{h}$ для любых элементов x, $y\in\mathfrak{h}$.

Гомоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ называется линейное отображение $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$, согласованное с коммутаторами введёнными в обеих алгебрах:
$$f([x,y])=[f(x),f(y)]\,.$$

Если это отображение является взаимнооднозначным, то тогда говорят об *изоморфизме* алгебр Ли.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ как в векторном пространстве можно выбрать базис $\{t_{(a)}\}$. Размерность векторного пространства в этом случае отождествляется с размерностью алгебры Ли $\dim\mathfrak{g}$.

в. Группы Ли

Для простоты в дальнейшем мы будем рассматривать матричные группы, элементами которых являются матрицы (иначе говоря, будем рассматривать подгруппы группы $GL(N,\mathbb{C})$); хотя излагаемые здесь понятия имеют общий характер, они проще всего формулируются для матричных групп. В пространстве матриц $N \times N$ естественным образом вводится понятие близости матриц (топология): две матрицы близки, если все их элементы близки. Так же вводится дифференцирование семейства матриц $\mathbf{A}(\epsilon)$ по действительному параметру ϵ: элементами матрицы $\left(\frac{d\mathbf{A}}{d\epsilon}\right)_{ij}$ являются производные $\frac{dA_{ij}(\epsilon)}{d\epsilon}$ матричных элементов $A_{ij}(\epsilon)$. Вообще, пространство всех комплексных матриц $N\times N$ можно рассматривать как $2N^2$-мерное (действительное) евклидово пространство $\mathbb{R}^{2N^2}$, координатами которого являются $2N^2$ матричных элементов $\mathrm{Re}\,A_{ij}$ и $\mathrm{Im}\,A_{ij}$. Гладкие семейства матриц представляют из себя поверхности (многообразия), вложенные в это евклидово пространство. Например, гладкое семейство матриц $\mathbf{A}(\epsilon)$, зависящее от действительного параметра ϵ, представляет собой кривую в $\mathbb{R}^{2N^2}$, а $\frac{d\mathbf{A}}{d\epsilon}$ соответствует касательному вектору к этой кривой. Гладкие (матричные) группы — это такие группы, которые представляют собой гладкие многообразия в описанном выше пространстве $\mathbb{R}^{2N^2}$. Такие группы мы будем называть *группами Ли*. Простейшим нетривиальным примером группы Ли является группа $U(1)$. Её также можно считать матричной группой, считая комплексные числа матрицами 1×1. Группа $U(1)$ представляет собой окружность на плоскости комплексных чисел (на двумерном действительном пространстве матриц 1×1). Группы $U(N)$, $SU(N)$, $O(N)$, $SO(N)$ также являются группами Ли.

Для каждой точки (искривлённого) многообразия размерности k в $2N^2$-мерном евклидовом пространстве можно определить касательное пространство к многообразию в этой точке: это действительное векторное пространство размерности k, состоящее из векторов, касательных к многообразию в данной точке. Касательным пространством для группы Ли G в единице является алгебра Ли $\mathfrak{g}$ этой группы Ли (единица группы — единичная матрица — это одна из точек группового многообразия). Иначе говоря, любая кривая $\mathbf{A}(\epsilon)$ в группе Ли G (считаем, что $\mathbf{A}(0) = \mathbf{I}$) представляется вблизи единицы в виде

$$\mathbf{A}(\epsilon) = \mathbf{I} + \epsilon\mathbf{X} + o(\epsilon), \tag{1.5}$$

где матрица $\mathbf{X} = \left.\dfrac{d\mathbf{A}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ принадлежит алгебре Ли.

Чтобы доказать это, возьмём две кривые $\mathbf{A}(\epsilon)$, $\mathbf{B}(\epsilon)$ на многообразии G, проходящие через единицу, и соответствующие им касательные векторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Тогда не трудно видеть, что касательные векторы к трёх другим кривым $\mathbf{M}_1(\epsilon) = \mathbf{A}(C\epsilon)$, $\mathbf{M}_2(\epsilon) = \mathbf{A}(\epsilon)\mathbf{B}(\epsilon)$ и $\mathbf{M}_3(\epsilon) = \mathbf{A}(\sqrt{\epsilon})\mathbf{B}(\sqrt{\epsilon})\mathbf{A}^{-1}(\sqrt{\epsilon})\mathbf{B}^{-1}(\sqrt{\epsilon})$ имеют вид

$$\left.\frac{d\mathbf{M}_1}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = C\,\mathbf{X}\,, \qquad \left.\frac{d\mathbf{M}_2}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}\,,$$
$$\left.\frac{d\mathbf{M}_3}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\ .$$

Так как для любых $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathfrak{g}$ и любого вещественного числа C векторы $C\,\mathbf{X}$, $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ и $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ тоже принадлежат $\mathfrak{g}$, то касательное пространство $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли.

Размерность группы Ли как размерность соответствующего многообразия совпадает с размерностью её алгебры Ли.

Опишем алгебры Ли некоторых групп.

1) Алгебра $\mathfrak{u}(N)$. Унитарные матрицы, близкие к единичной, должны удовлетворять соотношению

$$(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{X}+o(\epsilon))\left(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{X}^{\dagger}+o(\epsilon)\right)=\mathbf{I}.$$

Отсюда получаем, что алгебра Ли $\mathfrak{u}(N)$ — это алгебра всех антиэрмитовых матриц

$$\mathbf{X}^{\dagger}=-\mathbf{X}\,. \tag{1.6}$$

2) Алгебра $\mathfrak{su}(N)$. Помимо унитарности, матрицы из группы $SU(N)$, близкие к единичной, должны удовлетворять свойству

$$\det\left(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{X}+o(\epsilon)\right)=1.$$

Поскольку для малых ϵ верно, что

$$\det(\mathbf{I}+\epsilon\mathbf{X})=1+\epsilon\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{X}+o(\epsilon),$$

получаем условие

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{X}=0\,. \tag{1.7}$$

Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{su}(N)$ — это алгебра всех бесследовых антиэрмитовых матриц.

3) Алгебра $\mathfrak{so}(N)$ — это алгебра всех действительных антисимметричных матриц

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{X}\,. \tag{1.8}$$

Условие $\mathrm{Tr}\,\mathbf{X}=0$ в этом случае выполняется автоматически.

Лекция 2

а. *Электродинамика как калибровочная теория*

Известно, что волновая функция $\psi(x)$, используемая для описания движения микрочастиц в квантовой механике, сама по себе физического смысла не имеет, в отличие от квадрата её модуля $|\psi|^2 = \psi^\dagger\psi$, который определяет плотность вероятности обнаружения частицы в данном месте.

Квадрат модуля волновой функции не изменится, если $\psi(x)$ подвергнуть фазовому преобразованию

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \mathrm{e}^{-ie\theta(x)}\psi(x), \\ \psi^\dagger(x) &\longrightarrow \mathrm{e}^{ie\theta(x)}\psi^\dagger(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где e — постоянная, отождествляемая с элементарным электрическим зарядом, $\theta(x)$ — параметр преобразования.

Когда этот параметр $\theta(x)$ — постоянное число, говорят о *глобальной симметрии*. Если же $\theta(x)$ представляет собой функцию точек пространства-времени, речь идёт о *локальной симметрии*.

Волновая функция электрона $\psi(x)$ представляет собой решение уравнения Дирака

$$i\gamma^k\partial_k\psi - m\,\psi = 0, \tag{2.2}$$

полученного с помощью вариационной процедуры из действия

$$\mathcal{S}_{\text{Дирака}} = \int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{Дирака}}\,, \quad \mathcal{L}_{\text{Дирака}} = i\,\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi\,. \tag{2.3}$$

Здесь γ^k — гамма-матрицы Дирака, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^k\gamma^m + \gamma^m\gamma^k = 2\,\mathrm{g}^{km}\,\mathbf{I}. \tag{2.4}$$

$$\left(\gamma^4\right)^2 = -\mathbf{I}, \qquad \left(\gamma^a\right)^2 = +\mathbf{I},\ a = 1, 2, 3; \tag{2.5}$$

$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^4$ — дираковский сопряжённый спинор, m — масса электрона.

Уравнение (2.2) является инвариантным относительно глобальных преобразований, в то время как под действием локальных преобразований ($\theta(x) \neq \mathrm{const}$) оно, очевидно, меняет свой вид.

Можно показать, что уравнение восстанавливает свою инвариантность, если вместо частной производной $\partial_k\psi$ записать её «удлинённую» версию:

$$\begin{aligned} \partial_k\psi &\longrightarrow \hat{D}_k\psi = \partial_k\psi + ieA_k\psi, \\ \partial_k\bar{\psi} &\longrightarrow \hat{D}_k\bar{\psi} = \partial_k\bar{\psi} - ieA_k\bar{\psi}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где A_k — дополнительное поле, которое при локальном фазовом преобразовании должно меняться как

$$A_k \xrightarrow{\theta} A'_k = A_k + \partial_k\theta. \tag{2.7}$$

Преобразования (2.1) и (2.7) называют *калибровочными преобразованиями*, а поля A_k — *калибровочными полями*.

Свойства введённого калибровочного поля полностью совпадают со свойствами вектор-потенциала электромагнитного поля. Дополнительное слагаемое $e\gamma^k A_k\psi$ в получившемся уравнении

$$i\gamma^k\hat{D}_k\psi - m\psi = i\gamma^k\partial_k\psi - e\gamma^k A_k\psi - m\psi = 0$$

описывает взаимодействие поля электрона ψ с электромагнитным полем A_k, причём с константой связи, равной элементарному заряду e.

б. Тензор Максвелла

Для завершения построения локально инвариантного лагранжиана следует найти «кинетическое» слагаемое для поля A_m, то есть калибровочно инвариантное выражение, зависящее только от A_m и его производных, но не от ψ.

Простейшим тензором, инвариантным относительно калибровочных преобразований (2.7), является известный из электродинамики тензор напряжённости электромагнитного поля или тензор Максвелла

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m\,. \tag{2.8}$$

Очевидно, что F_{mn} является антисимметричным относительно перестановки своих индексов: $F_{mk} = -F_{km}$. Легко проверить также, что он удовлетворяет тождеству, называемому тождеством Бьянки,

$$\partial_m F_{ik} + \partial_i F_{km} + \partial_k F_{mi} = 0, \tag{2.9}$$

или, в иной записи,

$$\partial_m \overset{*}{F}{}^{mk} = 0, \tag{2.10}$$

где $\overset{*}{F}_{ik} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikmn} F^{mn}$ — тензор, дуальный к тензору F_{ik}.

в. Уравнения Максвелла

Построенный с помощью тензора Максвелла скаляр

$$\mathcal{L}_{\text{э/м}} = \frac{1}{4}\, F_{km} F^{km} \tag{2.11}$$

представляет собой лагранжиан электромагнитного поля.

Таким образом, модель взаимодействия поля электрона с электромагнитным полем описывается с помощью лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{полн}} = i\,\bar{\psi}\gamma^k \hat{D}_k\psi - m\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_{\text{э/м}} =$$
$$= i\,\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi - m\bar{\psi}\psi - eA_k\bar{\psi}\gamma^k\psi + \frac{1}{4}\,F_{km}F^{km}. \tag{2.12}$$

Варьируя его по компонентам поля ψ и используя принцип наименьшего действия, получаем

$$i\gamma^k\hat{D}_k\psi - m\psi = 0, \quad -i\hat{D}_k\bar{\psi}\gamma^k - m\bar{\psi} = 0. \tag{2.13}$$

Производя ту же операцию относительно потенциалов калибровочных полей A_k, приходим к уравнениям Максвелла:

$$\delta\mathcal{L}_{\text{полн}} = i\,\bar{\psi}\,\gamma^k\,\delta(\hat{D}_k\psi) + \frac{1}{2}\,\delta F_{km}F^{km} =$$
$$= -e\bar{\psi}\gamma^k\psi\cdot\delta A_k + \partial_m(\delta A_k)F^{mk} =$$
$$= -e\bar{\psi}\gamma^k\psi\cdot\delta A_k + \partial_m\left(A_kF^{mk}\right) - \partial_mF^{mk}\cdot\delta A_k =$$
$$= -\left(\partial_mF^{mk} + e\bar{\psi}\gamma^k\psi\right)\,\delta A_k + 4\text{-дивергенция}$$
$$\Downarrow$$
$$\partial_mF^{mk} = -I^{\,k}, \qquad I^{\,k} = e\,\bar{\psi}\gamma^k\psi\,. \tag{2.14}$$

Это уравнение называется уравнением Максвелла с источником, в то время как его упрощённая версия

$$\partial_mF^{mk} = 0 \tag{2.15}$$

— уравнением Максвелла без источников.

Ещё один простейший скаляр, составленный из компонент тензора Максвелла $\tilde{\mathcal{L}} = F_{km}\overset{*}{F}{}^{km}$, представляет собой полную 4-дивергенцию

$$F_{km}\overset{*}{F}{}^{km} = 2\,\partial_k(A_m\overset{*}{F}{}^{km})$$

и дополнительного вклада в уравнения поля вносить не будет.

г. *Выбор калибровки*

Калибровочная инвариантность уравнений Максвелла приводит к тому, что их общее решение содержит произвольную скалярную функцию пространственно-временных координат x^k. Это свойство неоднозначности решения неудобно в более сложных случаях, когда имеются источники. Поэтому часто накладывают дополнительное условие на поле A_k так, чтобы этот произвол уменьшить, или, как говорят, фиксируют калибровку. Часто используют следующие калибровочные условия:

1. Кулоновская калибровка
$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0. \tag{2.16}$$
Это условие, так же как и все другие, не инвариантно относительно калибровочных преобразований: если $A_k(x)$ удовлетворяет этому условию, то $A'_k(x) = A_k(x) + \partial_k\theta(x)$ тоже удовлетворяет ему, только если $\Delta\theta = 0$.

2. Калибровка Лоренца
$$\partial_k A^k = 0. \tag{2.17}$$
В отличие от кулоновского условия, это условие инвариантно относительно остаточных калибровочных преобразований $A'_k(x) = A_k(x) + \partial_k\theta(x)$, где $\theta(x)$ удовлетворяет уравнению Даламбера $\Box\theta \equiv \partial_k\partial^k\theta = 0$.

3. Калибровка $A_0 = 0$. Остаточная калибровочная инвариантность описывается калибровочными функциями $\theta(x)$, не зависящими от времени, $\partial_4\theta = 0$.

д. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля*

Найдём теперь выражение для тензора энергии-импульса $\mathbb{T}_{ik}$ электромагнитного поля. Для этого возьмём уравнения Максвелла без источников

$$\partial_m F^{mk} = 0$$

и свернём обе его части с F_{pk}. Воспользуемся теперь свойствами тензора Максвелла и тождеством Бьянки (2.9):

$$\begin{aligned} 0 = \partial_m F^{mk} F_{pk} = \partial_m \left(F^{mk} F_{pk}\right) - F^{mk}\,\partial_m F_{pk} = \\ = \partial_m \left(F^{mk} F_{pk}\right) - \frac{1}{2}\,F^{mk}\,\partial_p F_{mk} = \partial_m \left(F^{mk} F_{pk}\right) - \frac{1}{4}\,\partial_p\,\left(F^{mk} F_{mk}\right) = \\ = \partial_i \left[F^{ik} F_{pk} - \frac{1}{4}\,\delta^i_p\,F^{mk} F_{mk}\right]\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Так как для компонент искомого тензора должен выполняться закон сохранения в дифференциальной форме

$$\partial_i \mathbb{T}^i_p = 0\,,$$

всегда можно выбрать $\mathbb{T}^i_p$ пропорциональным выражению, стоящему в квадратных скобках равенства (2.18). Отсюда, принимая в качестве коэффициента пропорциональности единицу, получаем, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$\mathbb{T}_{ik} = F_{im} F_{k.}^{\ m} - \frac{1}{4}\,g_{ik}\,F_{mp}\,F^{mp}\,. \tag{2.19}$$

Компоненты найденного нами тензора обладают следующими свойствами:

1. как уже отмечалось выше, $\partial_i \mathbb{T}^i_p = 0$ для любого решения уравнений Максвелла;

2. след тензора энергии-импульса тождественно равен нулю, $\mathbb{T}_i^i = 0$;

3. компонента $\mathbb{T}_{44}$, описывающая плотность энергии электромагнитного поля, всегда больше или равна нулю

$$\mathbb{T}_{44} = F_{4m} F_{4.}^{\ m} + \frac{1}{4} F_{mp} F^{mp} = \frac{1}{2} F_{4a} F_{4.}^{\ a} + \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} = \\ = \frac{1}{2}\Big((F_{14})^2 + (F_{24})^2 + \ldots + (F_{23})^2\Big) \geqslant 0\,,$$

причём знак равенства достигается только в случае $F_{mn} = 0$.

Лекция 3

a. Обобщение на произвольную группу преобразований

Простую конструкцию из прошлого раздела, которая приводит к электродинамике Максвелла, можно обобщить от случая инвариантности по отношению к локальным фазовым преобразованиям, на случай инвариантности относительно любой непрерывной группы симметрий (группы Ли) G.

Рассмотрим вместо одного фермионного поля мультиплет из N полей

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \cdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

который при произвольных преобразованиях из группы Ли G изменяется по следующему закону:

$$\psi \xrightarrow{\mathrm{U}} \psi' = \mathbf{U}^{-1}\psi. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{U}$ — элемент матричного представления группы G (в дальнейшем, для простоты, будем говорить, что $\mathbf{U} \in G$) является невырожденной квадратной матрицей N-го порядка. Соответствующий мультиплет сопряжённых полей

$$\bar{\psi} = \big(\bar{\psi}_1(x), \ldots, \bar{\psi}_N(x)\big) \tag{3.3}$$

преобразуется как

$$\bar{\psi} \xrightarrow{\mathrm{U}} \bar{\psi}' = \bar{\psi}\,\mathbf{U}. \tag{3.4}$$

Важно отличать это абстрактное преобразование от, скажем, вращений в обычном трёхмерном пространстве. Так, в своей первой работе Янг и Миллс описывали при помощи ψ дублет протон-нейтрон, и его преобразованиям соответствовали вращения в изотопическом пространстве.

Если элементы матрицы $\mathbf{U}$ не зависят от точки пространства-времени, лагранжиан фермионных полей

$$\mathcal{L}_{\text{ферм}} = i\,\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi$$

инвариантен относительно таких преобразований.

Замечание: Компоненты столбца ψ являются четырёхрядными спинорами. Поэтому, строго говоря, матрицы $\mathbf{U}$ и γ^k имеют размер $4N \times 4N$:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11}\,\mathbf{I}_4 & \dots & u_{1N}\,\mathbf{I}_4 \\ u_{21}\,\mathbf{I}_4 & \dots & u_{2N}\,\mathbf{I}_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{N1}\,\mathbf{I}_4 & \dots & u_{NN}\,\mathbf{I}_4 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} \gamma^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^k & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^k \end{pmatrix}.$$

Из данного развёрнутого представления легко видеть, что их произведение коммутативно

$$\mathbf{U}\gamma^k = \begin{pmatrix} u_{11}\,\gamma^k & \dots & u_{1N}\,\gamma^k \\ u_{21}\,\gamma^k & \dots & u_{2N}\,\gamma^k \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{N1}\,\gamma^k & \dots & u_{NN}\,\gamma^k \end{pmatrix} = \gamma^k\mathbf{U}\,.$$

Когда же мы будем рассматривать локальные преобразования $\mathbf{U}(x)$, инвариантность лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{ферм}}$ нарушится. Симметрия лагранжиана восстанавливается, если обычную частную производную ∂_k заменить, по аналогии с предыдущим разделом, «удлинённой» или калибровочной производной $\hat{D}_k$:

$$\partial_k\psi \longrightarrow \hat{D}_k\psi = \partial_k\psi + \mathbf{A}_k\psi, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{A}_k$ — дополнительное поле, которое при локальном преобразовании должно меняться как

$$\mathbf{A}_k \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathbf{A}'_k = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U}. \tag{3.6}$$

Это можно проверить, непосредственно вычислив закон преобразования калибровочной производной $\hat{D}_k\psi$:

$$\begin{aligned}\hat{D}_k\psi \xrightarrow{\mathrm{U}} \hat{D}_k\psi' = \partial_k\left(\mathbf{U}^{-1}\psi\right) + \left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U}\right)\mathbf{U}^{-1}\psi = \\ = \mathbf{U}^{-1}\partial_k\psi + \partial_k\mathbf{U}^{-1}\psi + \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_k\psi + \mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^{-1}\psi = \\ = \mathbf{U}^{-1}\hat{D}_k\psi + \left(\partial_k\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\right)\psi = \mathbf{U}^{-1}\hat{D}_k\psi.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ферм}} = i\,\bar{\psi}\gamma^k\hat{D}_k\psi \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathcal{L}'_{\text{ферм}} = i\,\bar{\psi}\mathbf{U}\gamma^k\mathbf{U}^{-1}\hat{D}_k\psi = \\ = i\,\bar{\psi}\gamma^k\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\hat{D}_k\psi = \mathcal{L}_{\text{ферм}}.\end{aligned}$$

Преобразования (3.2), (3.4) и (3.6) называют, по аналогии с предыдущим разделом, *калибровочными преобразованиями*, а поля $\mathbf{A}_k$ — *калибровочными полями*.

б. Калибровочные поля как элементы алгебры Ли

Возникает вопрос о геометрической природе введённой нами величины $\mathbf{A}_k$. Для ответа на него рассмотрим локальное преобразование из группы Ли G, бесконечно мало отличающееся от тождественного преобразования

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{I} + \epsilon\,\mathbf{P}(x) + o(\epsilon), \qquad \mathbf{U}^{-1}(x) = \mathbf{I} - \epsilon\,\mathbf{P}(x) + o(\epsilon), \tag{3.7}$$

где матрица $\mathbf{P}(x)$ принадлежит матричному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$ взятой нами группы преобразований G (в дальнейшем, для краткости, будем говорить, что $\mathbf{P} \in \mathfrak{g}$).

Легко доказать, что $\mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U} \in \mathfrak{g}$:

$$\mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon)) \cdot \partial_k(\mathbf{I} + \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon)) = \epsilon\,\partial_k\mathbf{P} + o(\epsilon).$$

Так как матрица $\partial_k\mathbf{P} \in \mathfrak{g}$, являясь, фактически, линейной комбинация элементов алгебры Ли, то и $\mathbf{U}^{-1}\partial_k\mathbf{U} \in \mathfrak{g}$. Следовательно, для согласованности преобразования (3.6) и само калибровочное поле $\mathbf{A}_k$ должно быть элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим теперь первое слагаемое в преобразовании (3.6):

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{U} &= (\mathbf{I} - \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon)) \cdot \mathbf{A}_k \cdot (\mathbf{I} + \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon)) = \\ &= \mathbf{A}_k + \epsilon\,(\mathbf{A}_k\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}_k) + o(\epsilon) = \mathbf{A}_k + \epsilon\,[\mathbf{A}_k\mathbf{P}] + o(\epsilon).\end{aligned}$$

Здесь квадратными скобками обозначен коммутатор двух элементов алгебры Ли. Из приведённого выражения очевидно, что $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{U} \in \mathfrak{g}$.

в. Тензор напряжённости калибровочного поля

Из потенциалов $\mathbf{A}_k$ можно сконструировать тензор напряжённости калибровочного поля, аналогичный тензору Максвелла в электродинамике

$$\mathbf{F}_{km} = \partial_k\mathbf{A}_m - \partial_m\mathbf{A}_k + [\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_m]\ . \tag{3.8}$$

Как и $\mathbf{A}_k$, величины $\mathbf{F}_{km}$ принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Под действием произвольного калибровочного преобразования $\mathbf{U}$ компоненты тензора напряжённости преобразуются как

$$\mathbf{F}_{km} \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathbf{F}'_{km} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}_{km}\mathbf{U}\,. \tag{3.9}$$

Докажем это:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_{km} &= \partial_k \mathbf{A}'_m - \partial_m \mathbf{A}'_k + [\mathbf{A}'_k, \mathbf{A}'_m] = \\
&= \partial_k \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \partial_k \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_m \partial_k \mathbf{U} + \\
&+ \partial_k \mathbf{U}^{-1} \partial_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \partial_{km} \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_k \partial_m \mathbf{U} + \\
&+ \mathbf{U}^{-1} \partial_k \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \partial_k \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \partial_m \mathbf{U} - (k \leftrightarrow m) = \\
&= \mathbf{U}^{-1} \partial_k \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_m \partial_k \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \partial_k \partial_m \mathbf{U} + \\
&+ \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_m \mathbf{U} + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_k \partial_m \mathbf{U} - (k \leftrightarrow m) = \\
&= \mathbf{U}^{-1} \Big(\partial_k \mathbf{A}_m - \partial_m \mathbf{A}_k + [\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_m] \Big) \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}_{km} \mathbf{U} \,.
\end{aligned}$$

Если тензор напряжённости тождественно равен нулю, то говорят, что поле $\mathbf{A}_m$ представляет собой *чистую калибровку*. Компоненты потенциала такого поля с помощью соответствующего калибровочного преобразования можно всегда обратить в нуль. В общем же случае, потенциал поля, являющегося чистой калибровкой, имеет вид

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{U}^{-1} \partial_m \mathbf{U} \,. \tag{3.10}$$

г. *Инвариантная форма на алгебре Ли*

Для завершения построения локально инвариантного лагранжиана следует найти калибровочно инвариантное выражение, зависящее только от компонент поля $\mathbf{A}_m$ и их производных, но не от ψ.

Для этой цели естественно использовать обобщение лагранжиана электромагнитного поля, записанного ранее. Однако простейший вариант — комбинация $\mathbf{F}_{km}\mathbf{F}^{km}$ — для этого не подходит. Во-первых, она является матрицей, и, во-вторых, не обладает калибровочной инвариантностью. Обе указанные трудности можно обойти, если использовать выражение вида $\mathcal{G}\big(\mathbf{F}_{km}, \mathbf{F}^{km}\big)$, где $\mathcal{G}$ — симметричная невырожденная билинейная форма, определённая на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Потребуем, чтобы данная форма была калибровочно инвариантной, то есть при любых $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{g}$, $\mathbf{U} \in G$ удовлетворяла тождеству

$$\mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathcal{G}\big(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{U}\big)\,. \tag{3.11}$$

Для преобразования из группы Ли G, бесконечно мало отличающегося от тождественного преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathcal{G}\big(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{U}\big) = \\ &= \mathcal{G}\big((\mathbf{I} - \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon))\cdot\mathbf{X}\cdot(\mathbf{I} + \epsilon\,\mathbf{P}), (\mathbf{I} - \epsilon\,\mathbf{P} + o(\epsilon))\cdot\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{I} + \epsilon\,\mathbf{P})\big) = \\ &= \mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \epsilon\,\mathcal{G}([\mathbf{X}, \mathbf{P}], \mathbf{Y}) + \epsilon\,\mathcal{G}(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{P}]) + o(\epsilon)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда получаем, что для любых $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{P} \in \mathfrak{g}$ справедливо тождество

$$\mathcal{G}([\mathbf{X}, \mathbf{P}], \mathbf{Y}) + \mathcal{G}(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{P}]) = 0\,. \tag{3.13}$$

Очевидно, что любая форма, имеющая вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{X}\,\mathbf{Y})\,, \tag{3.14}$$

где Tr обозначает след матрицы, а λ — некоторый числовой множитель, является билинейной и симметричной. Более того, благодаря свойствам следа, она удовлетворяет условию калибровочной инвариантности (3.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\big(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{U}\big) &= \lambda\,\mathrm{Tr}\,\big(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{U}\big) = \\ = \lambda\,\mathrm{Tr}\,\big(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{U}\big) &= \lambda\,\mathrm{Tr}\,\big(\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\big) = \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{X}\,\mathbf{Y}) = \mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\,. \end{aligned}$$

К сожалению, далеко не для всех алгебр Ли и соответствующих им групп Ли форма $\mathcal{G}$, определяемая формулой (3.14), является невырожденной.

Ситуация сильно улучшается, если рассматриваемая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является простой. В этом случае невырожденная калибровочно инвариантная форма $\mathcal{G}$ существует, причём все возможные формы пропорциональны друг другу. Исходя из этого, мы можем использовать самый простой её вариант (3.14), а коэффициент пропорциональности выбрать позднее из соображений удобства.

Лекция 4

a. *Разложение по базису алгебры Ли*

Компоненты калибровочного поля $\mathbf{A}_k$ и тензора напряжённости $\mathbf{F}_{km}$, введённых нами в предыдущей лекции, как элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно разложить по базису этой алгебры $\{\mathbf{t}_{(a)}\}$

$$\mathbf{A}_k = gA_k^{(a)}\,\mathbf{t}_{(a)}, \qquad \mathbf{F}_{km} = gF_{km}^{(a)}\mathbf{t}_{(a)}, \qquad a = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}, \quad (4.1)$$

где $A_k^{(a)}$ и $F_{km}^{(a)}$ — вещественные функции точек пространства-времени, связанные соотношением

$$F_{km}^{(a)} = \partial_k A_m^{(a)} - \partial_m A_k^{(a)} + g f_{\cdot(b)(c)}^{(a)} A_k^{(b)} A_m^{(c)}\,, \qquad (4.2)$$

g — введённая из физических соображений константа связи, $f_{\cdot(b)(c)}^{(a)}$ — вещественные структурные постоянные алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\left[\mathbf{t}_{(a)}, \mathbf{t}_{(b)}\right] = f_{\cdot(a)(b)}^{(c)}\mathbf{t}_{(c)}\,.$$

Базисные элементы $\mathbf{t}_{(a)}$ обычно называют генераторами группы Ли G, а индексы в круглых скобках — групповыми индексами.

Компоненты матрицы введённой ранее билинейной формы $\mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, определяемые стандартным образом как

$$\mathcal{G}_{(a)(b)} = \mathcal{G}\left(\mathbf{t}_{(a)}, \mathbf{t}_{(b)}\right), \qquad \mathcal{G}_{(b)(a)} = \mathcal{G}_{(a)(b)}\,, \qquad (4.3)$$

могут быть использованы в качестве компонент метрики, с помощью которой осуществляется опускание групповых индексов. Поднятие групповых индексов производится, соответственно, при помощи обратной величины $\mathcal{G}^{(a)(b)}$, такой что

$$\mathcal{G}_{(a)(c)}\mathcal{G}^{(b)(c)} = \delta_{(a)}^{(b)}.$$

В ряде случаев использование объектов со всеми опущенными (или поднятыми) групповыми индексами является более удобным. Так из тождества (3.13) получаем следующее следствие:

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{t}_{(a)},[\mathbf{t}_{(b)},\mathbf{t}_{(c)}]\right)+\mathcal{G}\left([\mathbf{t}_{(a)},\mathbf{t}_{(c)}],\mathbf{t}_{(b)}\right)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{G}_{(a)(d)}f^{(d)}_{\cdot(b)(c)}+\mathcal{G}_{(b)(d)}f^{(d)}_{\cdot(a)(c)}=0$$
$$\Downarrow$$
$$f_{(a)(b)(c)}=-f_{(b)(a)(c)}. \tag{4.4}$$

Это значит, что $f_{(a)(b)(c)}\equiv\mathcal{G}_{(a)(d)}f^{(d)}_{\cdot(b)(c)}$ обладает свойством антисимметричности по любой паре своих индексов.

б. Калибровочная производная

Помимо калибровочной производной $\hat{D}_k$ от поля ψ

$$\hat{D}_k\psi=\partial_k\psi+\mathbf{A}_k\psi=\partial_k\psi+gA^{(a)}_k\mathbf{t}_{(a)}\psi \tag{4.5}$$

можно определить похожую операцию по отношению к тензору напряжённости калибровочного поля

$$\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}\equiv\partial_m\mathbf{F}_{ik}+[\mathbf{A}_m,\mathbf{F}_{ik}]\ , \tag{4.6}$$

или, используя групповые индексы, $\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}=g\hat{D}_mF^{(a)}_{ik}\mathbf{t}_{(a)}$, где

$$\hat{D}_mF^{(a)}_{ik}=\partial_mF^{(a)}_{ik}+gf^{(a)}_{\cdot(b)(c)}A^{(b)}_mF^{(c)}_{ik}\ . \tag{4.7}$$

Рассмотрим свойства величины $\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}$. Во-первых, благодаря определению (4.6), калибровочная производная тензора напряжённости под действием калибровочных преобразований преобразуется также как и тензор напряжённости $\mathbf{F}_{ik}$

$$\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}\xrightarrow{\mathrm{U}}\left(\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}\right)'=\mathbf{U}^{-1}\hat{D}_m\mathbf{F}_{ik}\mathbf{U}\ . \tag{4.8}$$

Во-вторых, для неё выполняется аналог тождества Бьянки

$$\hat{D}_m \mathbf{F}_{ik} + \hat{D}_i \mathbf{F}_{km} + \hat{D}_k \mathbf{F}_{mi} = 0, \tag{4.9}$$

или, используя более краткие обозначения,

$$\hat{D}_m \overset{*}{\mathbf{F}}{}^{mk} = 0\,, \tag{4.10}$$

где $\overset{*}{\mathbf{F}}_{ik} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ikmn}\mathbf{F}^{mn}$ — тензор, дуальный к тензору напряжённости калибровочного поля.

Формула (4.7) допускает естественное обобщение на случай двух или большего числа групповых индексов, верхних или нижних:

$$\begin{aligned}\hat{D}_m X^{(a)\cdots}_{\cdots(d)} \equiv \partial_m X^{(a)\cdots}_{\cdots(d)} + g f^{(a)}_{\cdot(b)(c)} A^{(b)}_m X^{(c)\cdots}_{\cdots(d)} - \ldots \\ - g f^{(c)}_{\cdot(b)(d)} A^{(b)}_m X^{(a)\cdots}_{\cdots(c)} + \ldots\,.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Как можно видеть, метрика $\mathcal{G}_{(a)(b)}$ в этом случае удовлетворяет тождеству

$$\hat{D}_m \mathcal{G}_{(a)(b)} = 0\,, \tag{4.12}$$

Это означает, что оператор $\hat{D}_m$, в известном смысле, является ковариантной производной. Кроме этого, используя определение (4.11), можно показать, что для введённая нами калибровочная производная подчиняется правилу Лейбница:

$$\hat{D}_m \left(X^{(a)} Y^{(b)}\right) = X^{(a)} \hat{D}_m Y^{(b)} + \hat{D}_m X^{(a)}\, Y^{(b)}. \tag{4.13}$$

Коммутатор операторов $\hat{D}_m$ в простейшем случае, когда имеется только один групповой индекс, равен

$$[\hat{D}_k, \hat{D}_m] X^{(a)} \equiv \left(\hat{D}_k \hat{D}_m - \hat{D}_m \hat{D}_k\right) X^{(a)} = g f^{(a)}_{\cdot(b)(c)} F^{(b)}_{km} X^{(c)}\,. \tag{4.14}$$

в. Уравнения Янга–Миллса

По аналогии с электродинамикой, модель взаимодействия мультиплета фермионных полей с калибровочным полем описывается с помощью лагранжиана

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{полн}} &= i\,\bar\psi\gamma^k\hat{D}_k\psi - m\bar\psi\psi + \mathcal{L}_{\text{кал. поля}} = \\ &= i\,\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - m\bar\psi\psi + \bar\psi\,\mathbf{A}_k\gamma^k\psi + \mathcal{L}_{\text{кал. поля}} = \\ &= i\,\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi - m\bar\psi\psi + g A_k^{(a)}\,\bar\psi\,\mathbf{t}_{(a)}\gamma^k\psi + \mathcal{L}_{\text{кал. поля}}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Определим лагранжиан калибровочного поля как

$$\mathcal{L}_{\text{кал. поля}} = \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\left(\mathbf{F}_{mn}, \mathbf{F}^{mn}\right) = \frac{1}{4}\,\mathcal{G}_{(a)(b)}F_{mn}^{(a)}F^{(b)mn}\,. \tag{4.16}$$

Благодаря определению формы $\mathcal{G}$, данное выражение является, очевидно, калибровочно-инвариантным:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{\text{кал. поля}} &= \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\left(\mathbf{F}'_{mn}, \mathbf{F}'^{mn}\right) = \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\left(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}_{mn}\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^{mn}\mathbf{U}\right) = \\ &= \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\left(\mathbf{F}_{mn}, \mathbf{F}^{mn}\right) = \mathcal{L}_{\text{кал. поля}}\,.\end{aligned}$$

Вариация его относительно компонент калибровочного поля имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\text{кал. поля}} &= \frac{1}{2g^2}\,\mathcal{G}\left(\delta\mathbf{F}_{mn}, \mathbf{F}^{mn}\right) = \\ &= \frac{1}{g^2}\,\mathcal{G}\left(\partial_m\delta\mathbf{A}_n + [\mathbf{A}_m, \delta\mathbf{A}_n], \mathbf{F}^{mn}\right) = \\ &= \frac{1}{g^2}\,\partial_m\left\{\mathcal{G}\left(\delta\mathbf{A}_n, \mathbf{F}^{mn}\right)\right\} - \frac{1}{g^2}\,\mathcal{G}\left(\delta\mathbf{A}_n, \partial_m\mathbf{F}^{mn} + [\mathbf{A}_m, \mathbf{F}^{mn}]\right) = \\ &= \frac{1}{g^2}\,\partial_m\left\{\mathcal{G}\left(\delta\mathbf{A}_n, \mathbf{F}^{mn}\right)\right\} - \frac{1}{g^2}\,\mathcal{G}\left(\delta\mathbf{A}_n, \hat{D}_m\mathbf{F}^{mn}\right).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Первое слагаемое представляет собой полную 4-дивергенцию, следовательно, в уравнения поля оно вклада давать не будет.

Перепишем выражение для вариации, используя групповые индексы ($\delta\mathbf{A}_n = g\delta A_n^{(a)}\,\mathbf{t}_{(a)}$):

$$\delta\mathcal{L}_{\text{кал. поля}} = -\delta A_n^{(a)}\hat{D}_m F_{(a)}^{mn} + 4\text{-дивергенция}. \tag{4.18}$$

Отсюда легко получить, что уравнения динамики калибровочного поля должны иметь вид (срав. с (2.14))

$$\hat{D}_m F_{(a)}^{mk} = -I_{(a)}^k, \qquad I_{(a)}^k = -g\bar{\psi}\,\mathbf{t}_{(a)}\gamma^k\psi\,. \tag{4.19}$$

Это уравнение называется уравнением Янга-Миллса с источником, в то время как его упрощённая версия

$$\hat{D}_m F_{(a)}^{mk} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{D}_m \mathbf{F}^{mk} = 0 \tag{4.20}$$

— уравнением Янга-Миллса без источников или просто *уравнением Янга-Миллса.*

г. *Тензор энергии-импульса калибровочного поля*

Найдём теперь тензор энергии-импульса $\mathbb{T}_{ik}$ калибровочного поля. Для этого рассмотрим выражение $\mathcal{G}\big(\hat{D}_m\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{pk}\big)$, равное нулю на решениях уравнения (4.20). Воспользовавшись свойствами (4.12), (4.13) и тождеством Бьянки (4.9), получим

$$\begin{gathered}
0 = \mathcal{G}\big(\hat{D}_m\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{pk}\big) = \partial_m\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{pk}\big) - \mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\hat{D}_m\mathbf{F}_{pk}\big) = \\
= \partial_m\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{pk}\big) - \frac{1}{2}\,\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\hat{D}_p\mathbf{F}_{mk}\big) = \\
= \partial_m\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{pk}\big) - \frac{1}{4}\,\partial_p\,\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{mk}\big) = \\
\Downarrow \\
0 = \partial_i\left[\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{ik},\mathbf{F}_{pk}\big) - \frac{1}{4}\,\delta_p^i\,\mathcal{G}\big(\mathbf{F}^{mk},\mathbf{F}_{mk}\big)\right]. \qquad (4.21)
\end{gathered}$$

Поскольку для компонент искомого тензора должен выполняться закон сохранения в дифференциальной форме

$$\partial_i \mathbb{T}^i_p = 0\,,$$

всегда можно выбрать $\mathbb{T}^i_p$ пропорциональным выражению, стоящему в квадратных скобках равенства (4.21). Отсюда, принимая в качестве коэффициента пропорциональности величину $1/g^2$, получаем

$$\mathbb{T}_{ik} = \frac{1}{g^2}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{im}, \mathbf{F}_{k\cdot}^{\ m}\Big) - \frac{1}{4g^2}\,g_{ik}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{mp}, \mathbf{F}^{mp}\Big)\ . \tag{4.22}$$

Наибольший интерес для нас будет представлять выражение для плотности энергии калибровочного поля:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{44} &= \frac{1}{g^2}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{4m}, \mathbf{F}_{4\cdot}^{\ m}\Big) + \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{mp}, \mathbf{F}^{mp}\Big) = \\ &= \frac{1}{2g^2}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{4a}, \mathbf{F}_{4\cdot}^{\ a}\Big) + \frac{1}{4g^2}\,\mathcal{G}\Big(\mathbf{F}_{ab}, \mathbf{F}^{ab}\Big) = \\ &= \frac{1}{2g^2}\Big(\mathcal{G}(\mathbf{F}_{14}, \mathbf{F}_{14}) + \mathcal{G}(\mathbf{F}_{24}, \mathbf{F}_{24}) + \ldots + \mathcal{G}(\mathbf{F}_{23}, \mathbf{F}_{23})\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Если форма $\mathcal{G}$ является положительно определённой, то для полей, не являющихся чистой калибровкой, плотность энергии всегда положительна $\mathbb{T}_{44} > 0$.

д. *Простейшие калибровочные группы*

Важно отметить, что обычная электродинамика Максвелла может быть получена из рассмотренной схемы, если в качестве группы калибровочных преобразований G взять одномерную *абелеву* группу Ли $U(1)$.

Кроме того, важнейшую роль в различных приложениях играют неабелевы группы $SU(N)$, элементами которых

являются унитарные матрицы с определителем, равным единице
$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{U} = 1\,,$$
и соответствующие им алгебры Ли $\mathfrak{su}(N)$. Размерность такой алгебры может быть вычислена при помощи простой формулы
$$\dim \mathfrak{su}(N) = N^2 - 1\,.$$
Так, например, $\dim \mathfrak{su}(2) = 3$, $\dim \mathfrak{su}(3) = 8$, $\dim \mathfrak{su}(4) = 15$ и так далее.

Группа $SU(2)$ в этом ряду является простейшей неабелевой калибровочной группой. Её генераторами (базисом в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{su}(2)$) можно считать набор антиэрмитовых матриц $\mathbf{t}_{(a)} = \frac{1}{2i}\boldsymbol{\tau}_{(a)}$, где $a = 1, 2, 3$, $\boldsymbol{\tau}_{(a)}$ — матрицы Паули:
$$\boldsymbol{\tau}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\tau}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\tau}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$
Для такого выбора базиса метрика $\mathcal{G}_{(a)(b)}$ и структурные постоянные $f_{(a)(b)(c)}$ принимают простой вид (множитель в определении метрики выбирается из соображения удобства)
$$\mathcal{G}_{(a)(b)} = -2 \cdot \mathrm{Tr}\left(\mathbf{t}_{(a)}\mathbf{t}_{(b)}\right) = \delta_{(a)(b)}\,, \quad f_{(a)(b)(c)} = \varepsilon_{(a)(b)(c)}\,. \quad (4.25)$$

При этом любую матрицу $\mathbf{U} \in SU(2)$ можно представить двумя способами: в виде экспоненты $\mathbf{U} = \exp(\mathbf{t}_{(a)}\theta^{(a)})$, где $\theta^{(a)}$ — произвольные параметры, либо как линейную комбинацию единичной матрицы и генераторов группы Ли
$$\mathbf{U} = V^4\mathbf{I} + 2V^{(a)}\mathbf{t}_{(a)}, \quad (V^4)^2 + (V^{(1)})^2 + (V^{(2)})^2 + (V^{(3)})^2 = 1\,. \quad (4.26)$$

Следующей по сложности является группа $SU(3)$. Её генераторами являются антиэрмитовы матрицы $\mathbf{t}_{(a)} = \frac{1}{2i}\boldsymbol{\lambda}_{(a)}$, где индекс (a) принимает значения от 1 до 8, а сами матрицы $\boldsymbol{\lambda}_{(a)}$, называемые матрицами Гелл-Манна, имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}_{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}_{(8)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Для такого выбора базиса метрика $\mathcal{G}_{(a)(b)}$, так же как и в случае алгебры $\mathfrak{su}(2)$, равна символу Кронекера

$$\mathcal{G}_{(a)(b)} = -2 \cdot \mathrm{Tr}\left(\mathbf{t}_{(a)}\mathbf{t}_{(b)}\right) = \delta_{(a)(b)}\,. \tag{4.28}$$

При этом естественно, что структурные постоянные $f_{(a)(b)(c)}$ для алгебры $\mathfrak{su}(3)$ уже не имеют такой простой вид, как в предыдущем случае, поэтому все возможные их значения мы здесь приводить не будем.

e. Параллельные калибровочные поля

Калибровочное поле, потенциал которого можно записать как

$$\mathbf{A}_m = \mathfrak{a}_m \mathbf{X}, \qquad A_m^{(a)} = \mathfrak{a}_m X^{(a)}\,, \tag{4.29}$$

где величина $X^{(a)}$ не зависит от координат, называется параллельным. Тензор напряжённости и его калибровочная производная для такого поля имеют вид

$$\mathbf{F}_{km} = \mathfrak{f}_{km}\,\mathbf{X}\,, \quad F_{km}^{(a)} = \mathfrak{f}_{km}\,X^{(a)}\,, \quad \mathfrak{f}_{km} = \partial_k \mathfrak{a}_m - \partial_m \mathfrak{a}_k\,,$$
$$\hat{D}_k F_{mp}^{(a)} = \partial_k \mathfrak{f}_{mp}\,X^{(a)}\,. \tag{4.30}$$

Отметим, что выражение (4.29) для потенциала калибровочного поля не является калибровочно инвариантным. Если потенциал с помощью калибровочных преобразований может быть приведён к виду (4.29), то такие калибровочные поля мы будем называть эффективно абелевыми.

Очевидным свойством параллельных калибровочных полей является то, что уравнение Янга-Миллса в этом случае редуцируется к уравнению Максвелла, так как все коммутаторы, входящие в уравнения, равны нулю. Следовательно, любое решение уравнений Максвелла путём умножения на независящий от координат элемент из соответствующей алгебры Ли $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ превращается в решение уравнений Янга-Миллса.

Получение же решений, не являющихся эффективно абелевыми, сопряжено со значительными трудностями. Во второй части настоящего конспекта мы рассмотрим методы построения простейших неабелевых решений — инстантонов и монополей.

Литература

1. В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля.* — М.: Эдиториал УРСС. — 1999. — 336 стр.

2. М. Пескин, Д. Шрёдер, *Введение в квантовую теорию поля.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2001. — 784 стр. — Глава 15.

3. Л. Б. Окунь, *Физика элементарных частиц.* — М.: Наука. — 1988. — 288 стр.

4. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Поля и фундаментальные взаимодействия.* — Киев: Наукова думка. — 1986. — 552 стр.

5. Н. П. Коноплёва, В. Н. Попов, *Калибровочные поля.* — М.: Эдиториал УРСС. — 2000. — 272 стр.

6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля.* — М.: Наука. — 1988. — 512 стр.

7. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* — М.: Изд-во МЦНМО. — 2003. — 216 стр.

8. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения.* — М.: Наука. — 1986. — 760 стр.

Заяц Алексей Евгеньевич

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Конспект лекций

Форм. $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$. Гарнитура JournalPSCyr.
Усл. печ. л. 2,21.